Universidade Estadual do Oeste do Paraná

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UNIOESTE- *CAMPUS* DE CASCAVEL

RUAN PABLO PFEFFER GALLIO

MILENA YUMI HIGASHI

SHIMMER ALVES SILVA

EDUARDO ROSSONI ZENI

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL

2023

RUAN PABLO PFEFFER GALLIO
MILENA YUMI HIGASHI
SHIMMER ALVES SILVA
EDUARDO ROSSONI ZENI

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação. Orientadores: Prof. Jean Sebastian Toillier e Amarildo de Vicente.

CASCAVEL
2023

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

O presente relatório tem o objetivo de relatar o trabalho desenvolvido na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I durante as atividades desenvolvidas no Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas - Promat. O relatório foi elaborado e pensado pelos acadêmicos Eduardo Zeni, Milena Yumi, Ruan Gallio e Shimmer Silva do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) - Campus Cascavel, e orientados pelos professores Jean Sebastian Toillier e Amarildo de Vicente. Aqui será discutido o Promat como um todo, bem como a experiência dos estagiários como professores nas aulas que decorreram, expondo os acontecimentos e aprendizados que tiveram, bem como os planos de aula, lista de exercícios e todos os materiais utilizados no encontro.

As atividades do Promat foram realizadas na própria Unioeste, e tem como objetivo oferecer aos alunos de rede pública que visam ingressar no ensino superior, aulas de matemática voltadas aos conteúdos que estão presentes nos vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), durante 10 encontros com conteúdos já pré-definidos e predominantemente abordados no ensino fundamental. São eles: frações, razão e proporção, radiciação e potenciação, equações e sistemas, função afim, função de 2º grau, polinômios, produtos notáveis, fatoração, geometria no triângulo, polígonos e circunferência, cálculo de área de figuras planas, seguindo o cronograma a seguir.

Quadro 1- Cronograma

Encontro	Data	Conteúdos
1	16/09/2023	Frações; Razão e proporção;
2	23/09/2023	Razão e proporção; Potência e radiciação;
3	30/09/2023	Potência e radiciação;

		Equações do primeiro grau;
4	07/10/2023	Sistemas; Equações do segundo grau;
5	14/10/2023	Função afim;
6	21/10/2023	Função de segundo grau;
7	04/11/2023	Polinômios
8	11/11/2023	Geometria
9	18/11/2023	Geometria
10	25/11/2023	Gincana

Fonte: Elaborado pelos autores

Este relatório foi dividido em três partes, começando pela descrição do Promat, dando sua razão de existir, para quem é destinado esse projeto, qual a duração e sua função. Em uma segunda parte há uma fundamentação teórica relacionada à prática aplicada no período do Promat, elencando pontos positivos na prática de ensino utilizando de materiais manipuláveis, em específico o uso do Algeplan no ensino de polinômios.

Na terceira e última parte está reunido o cronograma com os assuntos dos dez encontros, os planos de aula elaborados, relatórios sobre o ponto de vista e experiências da sala de aula, elencando pontos positivos e negativos dessa jornada, junto dos materiais utilizados em cada encontro.

PROMAT

O curso do Promat tem enfoque na área de Matemática, representa uma iniciativa promovida pela Unioeste. Este projeto é desenvolvido sob a supervisão do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, câmpus de Cascavel.

O Promat é destinado a estudantes do Ensino Médio que almejam futuramente participar de vestibulares ou concursos, mas também abre suas portas para aqueles indivíduos que possuem interesse em aprofundar seus conhecimentos em Matemática. Este curso é realizado nas instalações da própria universidade e é dividido em duas etapas, cada uma com um total de dez encontros. Na primeira etapa são abordados os tópicos de matemática do ensino fundamental dos anos finais que são mais frequentemente encontrados em vestibulares, particularmente no ENEM e no vestibular da Unioeste. Os alunos da disciplina de Estágio Supervisionado I são responsáveis pelo aprendizado dos inscritos no projeto, produzindo material e planos de aula para que sejam ministradas aos sábados. Já na segunda parte são trabalhados conteúdos de Matemática do Ensino Médio, esta parte do estágio é realizada pelos alunos do Estágio Supervisionado II.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O uso do Algeplan para o ensino de polinômios

Segundo Moro (2000), na história da matemática, os primeiros usos de polinômios surgiram em um contexto concreto na antiga Babilônia. Assumindo uma metodologia essencialmente geométrica, os matemáticos formulavam problemas que hoje seriam reconhecidos como problemas polinomiais com métodos que hoje chamamos de "completar o quadrado", embora sem recorrer à notação algébrica tradicional. O desenvolvimento subsequente do estudo dos polinômios se deu no século III d.C com Diofanto, matemático que introduziu uma abordagem com formas de representação que se assemelham mais ao sistema algébrico moderno (VOGEL, 2008) do que com o sistema baseado na geometria.

No entanto, é pertinente observar o crescimento na elaboração e disponibilização de materiais didáticos que resgatam a abordagem geométrica dos babilônios para o estudo dos polinômios. Nesse contexto, ressalta-se o Algeplan, cuja origem é desconhecida (ALMEIDA, 2021), mas tem demonstrado potencial no fomento de aulas de matemáticas mais dinâmicas e reflexivas, favorecendo uma aprendizagem mais significativa nos conteúdos que abrangem a álgebra (SANTOS; SANTOS, 2014).

O presente artigo tem como objetivo observar o uso do algeplan como ferramenta didática para o ensino de polinômios no ambiente do PROMAT, explorando suas possibilidades e limitações enquanto estratégia pedagógica no ensino de soma, subtração, multiplicação e fatoração de polinômios, buscando mostrar de maneira visual as operações nestes objetos matemáticas normalmente mais abstratos.

Aprendizagem significativa e o uso de materiais manipuláveis.

Quando falamos sobre aprendizagem significativa de matemática, buscamos algo além da simples memorização e cálculos rápidos. Para Ausubel (MOREIRA, 2008), a aprendizagem é a associação e a fixação de um novo material na estrutura cognitiva já construída. Assim, para que haja uma aprendizagem significativa, novos conceitos e proposições se entrelaçam com conceitos já adquiridos.

De acordo com Silva (2004), o uso de materiais manipuláveis visa promover o desenvolvimento e estimular o processo de aprendizado dos alunos. Isso ocorre à medida em que o professor transforma o ensino, onde diversão e a aprendizagem se entrelaçam, o que resulta em uma experiência de aprendizado genuína, completa e prazerosa. Peres e Barbosa (2020) afirmam que o uso de recursos didáticos, que neste trabalho chamamos de materiais manipuláveis, acaba criando alternativas para propiciar uma melhor compreensão do conteúdo.

> Desse modo, ao utilizarmos o material manipulável no contexto da sala de aula para trabalhar o conteúdo matemático, proporcionamos ao aluno tocar, sentir, manipular e movimentar as peças do material que representam a ideia do número. Isso é relevante para relacionar o material com o conteúdo ensinado, no intuito de ajudar o aluno a construir o conceito matemático. (PERES e BARBOSA, p. 4)

No entanto, como ressalta Marques (2013), o uso do material manipulável pode ser um forte aliado nas aulas de matemática, porém, de forma alguma deve substituir o papel do professor, apenas completar a sua aula, necessitando um cuidado do professor ao utilizá-lo, para não banalizar sua aula, salientam também Peres e Barbosa (2020) que a relação entre conteúdo e material deve ser muito bem estudada e preparada para que não haja um mal proveito ou até mesmo gere uma dificuldade/confusão no aluno, Nacarato (2005) relata que o professor acaba resolvendo de uma maneira utilizando o material manipulativo e não segue a mesma linha de pensamentos quando resolve normalmente no quadro, assim para o discente, acaba não há uma conexão entre o conteúdo aprendido na sala com a atividade proposta pelos materiais manipulativos.

Como nem sempre o ensino resulta na aprendizagem, mesmo que exija um grande esforço docente para incluir o material manipulável, ele não pode se frustrar pois como Farias (2018) salienta, a finalidade de toda essa preparação que o professor desempenha é totalmente voltada para a facilitação da aprendizagem.

O Algeplan

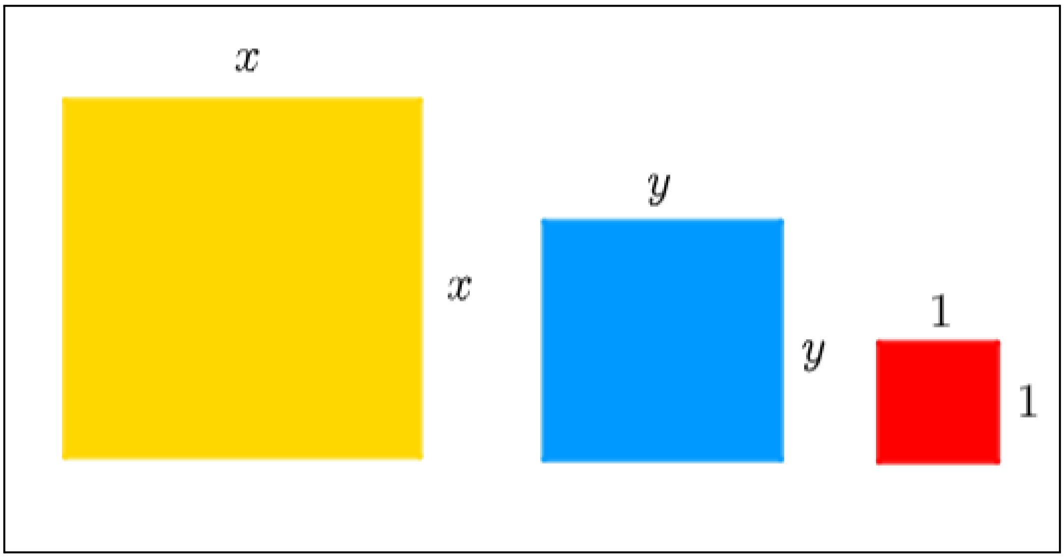
O material manipulável utilizado neste trabalho chama-se Algeplan, ele é constituído por 40 peças coloridas das quais são divididas entre seis formas geométricas e separados entre três quadrados e três retângulos diferentes entre si, cujas medidas dos lados representam a unidade ou as variáveis. A ideia central do Algeplan é facilitar a compreensão das operações algébricas (expressões algébricas, produtos notáveis, polinômios e fatoração) cada peça do material representa um valor algébrico considerando o valor de sua área.

O algeplan foi o recurso utilizado a fim de trazer um auxílio visual para o ensino de polinômios, conceito que muitas vezes pode ser abstrato ao ponto de os alunos não conseguirem compreender por si só. Segundo Almeida e Santos (2017), o processo da construção do pensamento algébrico é iniciado com a capacidade de estabelecer relações algébricas, seguido pela capacidade de modelar, generalizar, construir significados e operar com o desconhecido. É nosso intuito que o algeplan ajude o desenvolvimento de todas essas habilidades; porém com maior ênfase na capacidade de operar com o desconhecido, e a construção de significados. Pois a natureza manipulativa do objeto faz com que as formas de se operar algebricamente tornem-se intuitivas. Também esperamos que a apresentação da álgebra neste contexto dê uma luz às diversas aplicações, e ajude na construção de significado no pensamento algébrico de nossos alunos.

Uma experiência no Promat

Com os alunos em sala dividimos eles em grupos de 4 e 5 alunos, entregamos a eles dois conjuntos do algeplan, além de folhas sulfite; Com o auxílio dos slides, apresentamos as peças cujas dimensões seriam dadas (x, y e 1) como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Peças Algeplan



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Na folha sulfite, com o auxílio dos quadrados de dimensões dadas, os alunos deveriam anotar os valores das dimensões de novas peças de dimensões desconhecidas, de acordo com o quadro 2:

Quadro 2- Tabela com informações sobre o Algeplan

Figura	Dimensões	Perímetro	Área
			
			
			
			
			

Fonte: Elaborado pelos autores

Depois disso, os alunos foram instruídos a representar geometricamente alguns polinômios. Em seguida, precisaram representar de forma algébrica alguns conjuntos de figuras geométricas, como mostra os exemplos no quadro 3:

Quadro 3- Exemplos do uso do algeplan

Representação Dada	Representação apresentada pelos alunos
$2xy + x^2 + 3$	
	$y^2 + x + y$

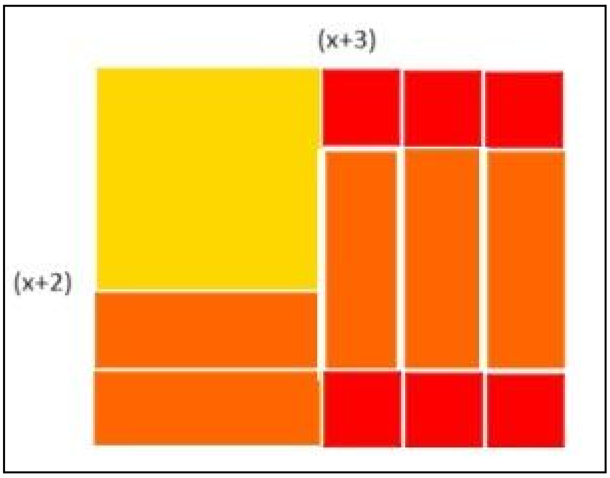
Fonte: Elaborado pelos autores

Em seguida, foi feita a formalização do conteúdo de polinômios, porém de uma forma mais intuitiva, partindo da definição de monômios, definindo um polinômio como uma expressão algébrica formada por monômios e fazendo referência ao conceito de área trabalhado no algeplan, onde cada monômio é representado por uma parte literal igual (uma área igual);

A partir desta definição, propomos a soma, subtração, multiplicação e fatoração de polinômios utilizando o algeplan.

- Soma e subtração: Na soma ou subtração de dois polinômios, só é possível operar os monômios que os compõem de partes literais iguais (só é possível somar/subtrair o número de quadriláteros cujas áreas são iguais);
- Multiplicação e Fatoração: Na multiplicação de dois polinômios, é necessário utilizar a propriedade distributiva. No algeplan é possível observar o que acontece na multiplicação ou fatoração ao formar um quadrilátero cujos lados são os polinômios que estão sendo multiplicados e somar a área do quadrilátero formado.

Figura 2 - Exemplo de fatoração



Fonte: Elaborado pelos autores

Ao apresentar a atividade, o primeiro conceito que precisou ser apresentado a todos foi sobre como representar a dimensão de um retângulo. Além disso, alguns alunos não souberam identificar as diferenças entre perímetro e área, o que precisou ser revisado nos grupos. No cálculo do perímetro dos quadriláteros, introduzimos o conceito de soma de polinômios onde foi possível perceber a dificuldade de identificar que a soma deve apenas ser realizada com monômios de partes literais iguais. Nesse contexto, mesmo antes da formalização dos conteúdos, foi possível observar obstáculos epistemológicos, como a dificuldade de identificar o significado de um polinômio no mundo real, e iniciar o processo de tratá-los.

Foi, também, um obstáculo para os alunos compreenderem o processo de multiplicação de polinômios. Com o algeplan, nosso objetivo foi de visualizar a multiplicação por meio do cálculo de área de retângulos, onde cada um dos lados seria dado por um polinômio, logo, a multiplicação resultaria na soma das áreas das peças utilizadas para representar seus lados

Durante essa atividade, os alunos não conseguiram de imediato visualizar como formar os retângulos de lados iguais aos dos polinômios dados (x+2 e x+3). Por consequência disto, nesta parte da atividade foi necessário um acompanhamento mais de perto da parte dos professores para com os alunos a fim de ajudá-los a averiguar por si mesmos os valores dos lados dos polígonos e a forma de completar suas áreas.

Verificou-se que o resultado final foi positivo, visto que os alunos foram participativos e demonstraram interesse na atividade, além do relato dos mesmos após a aula, onde afirmaram que a mesma foi divertida e intuitiva, o que facilitou o processo de aprendizagem deles.

Referências

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. PENSAMENTO ALGÉBRICO: EM BUSCA DE UMA DEFINIÇÃO. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p. 34-60, jun. 2017. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/30004/1/Almeida2017Pensamento.pdf. Acesso em: 10 dez. 2023.

ALMEIDA, Virllane Dantas de. **ALGEPLAN COMO RECURSO DIDÁTICO NAS AULAS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2021. 29 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2021. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/jspui/bitstream/123456789/9237/3/Algeplan%20como%20recurso%20did%C3%A1tico%20nas%20aulas%20do%208%C2%BA%20ano%20do%20ensino%20fundamental.pdf Acesso em: 09 nov. 2023.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **PERSPECTIVAS EM ARITMÉTICA E ÁLGEBRA, PARA O SÉCULO XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus Editora, 1997. 176 p.

MARQUES, Telma Inês Neves. **A implementação de materiais pedagógicos no 1.º Ciclo**. 2013. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Escola Superior de Educação João de Deus, Lisboa, 2013. Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.26/3926. Acesso em: 13 nov. 2023.

MOREIRA, Marco Antonio. ORGANIZADORES PRÉVIOS E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. **Revista Chilena de Educación Científica**, Online, v. 2, n. 7, p. 23-30, 2008.

MORO, Marcelo de Oliveira. **Um estudo sobre polinômios**. 2002. 48 f. Tese (Doutorado) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97159/Marcelo_Moro.PDF?sequence. Acesso em: 08 nov. 2023.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 9, n. 9_10, p. 1–6, 2005. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/329. Acesso em: 10 dez. 2023.

ORNELLAS FARIAS, A. J. A Psicologia Educacional da Aprendizagem Significativa Aplicada à Programação Escolar. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 7, n. 8, p. 20–40, 2018. DOI: 10.3333/ps.v7i8.772. Disponível em: https://revistas.cesmac.edu.br/psicologia/article/view/772. Acesso em: 17 nov. 2023.

PASQUETTI, Camila. **PROPOSTA DE APRENDIZAGEM DE POLINÔMIOS ATRAVÉS DE MATERIAIS CONCRETOS**. 2008. 47 f. TCC (Graduação) - Curso de

Matemática, Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, 2008.

PERES, Élida de Souza; BARBOSA, Marcel de Almeida. ALGEPLAN: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE POLINÔMIOS. **ReDiPE**: Revista Diálogos e Perspectivas em Educação Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Marabá, v. 2, n. 1, p. 283-296, jun. 2020. Disponível em: https://periodicos.unifesspa.edu.br/index.php/ReDiPE/article/view/791/525. Acesso em: 09 dez. 2023.

SANTOS, Maria Gisabelle Bezerra Dos et al.. **Algeplan - Uma proposta dinâmica para o ensino da álgebra escolar**. Anais VIII EPBEM... Campina Grande: Realize Editora, 2014. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/9677>. Acesso em: 09/12/2023.

SILVA, Mônica Soltau da. **Clube de Matemática**: Jogos Educativos. São Paulo, Papirus Editora, 2004.

VOGEL, Kurt. Diophantus of Alexandria. **Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com**. Disponível em: https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/diophantus-alexandria#2830901182. Acesso em: 15 de nov. de 2023.

ENCONTROS

1.1. ENCONTRO 1 – 16/09/2023

1.1.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Frações, razão e proporção.

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: Capacitar o aluno a desenvolver a compreensão dos conceitos de frações, razão e proporção, de forma que possam aplicar em contextos do cotidiano.

Objetivos específicos:

- Revisar o conceito de fração como parte de um todo;
- Trabalhar operações com frações;
- Ajudar os alunos a reconhecer razões e proporções a partir de problemas contextualizados.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, jogo dorminhoco das frações, folha sulfite, folha transparência, marcador para quadro branco.

Encaminhamentos metodológico:

- Dinâmica de apresentação dos alunos, assim eles interagem entre si e descobrem seus nomes/idades e suas ambições;
- Jogo dorminhoco com frações em grupos de 8 pessoas;
- Separar os grupos do dorminhoco em grupos de 4 ou 5;
- Introduzir questões para resolução em grupo, buscando introduzir os conceitos no momento em que surgir a necessidade em cada grupo. Após a resolução dentro de cada grupo, realizaremos um momento de debate com a classe inteira, onde cada grupo poderá expor sua solução para os outros e pediremos que um representante de cada grupo vá ao para organizar as ideias trabalhar e deixar com que os próprios alunos formalizem os conceitos.

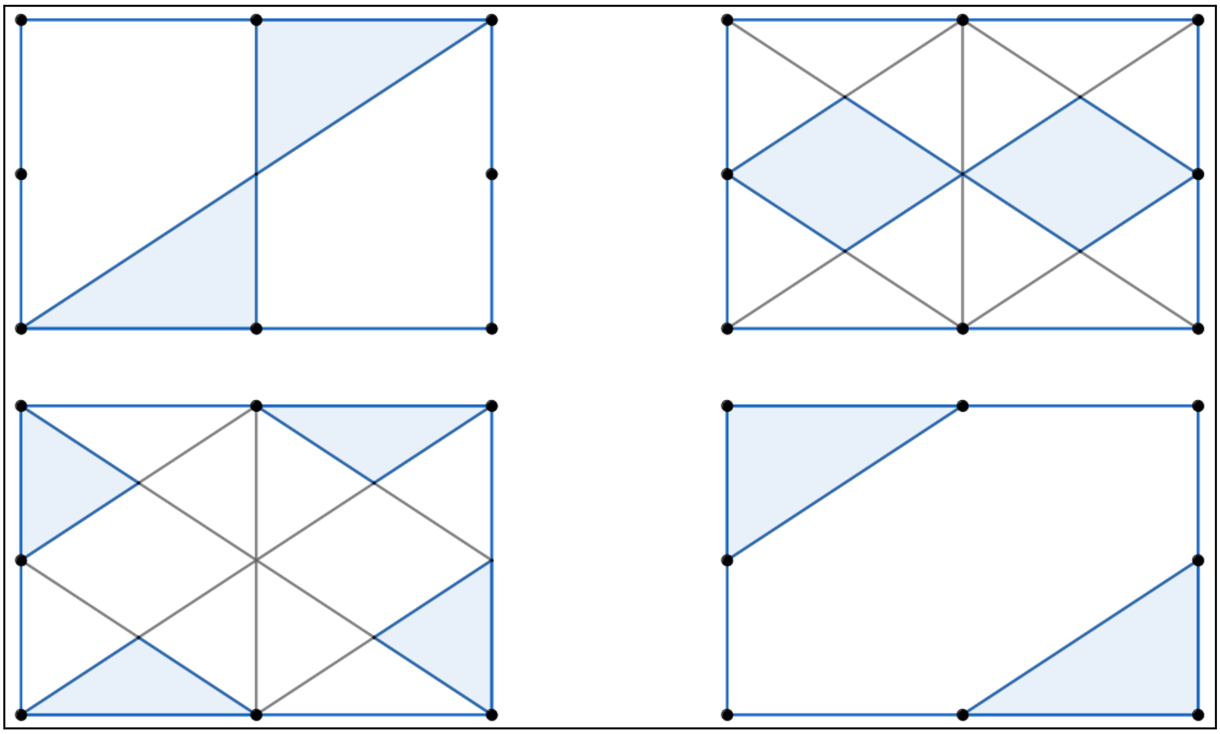
Atividade inicial (45 min ou 2/3 rodadas)

Primeiramente, faremos uma conversa para apresentação entre os alunos e estagiários, com duração de cinco a dez minutos. Começaremos entre os docentes, dizendo nome, idade, objetivo e alguma “curiosidade” do docente, passando assim, para os alunos e pedindo que façam o mesmo.

Separaremos os alunos em grupos e utilizaremos do jogo do dorminhoco para ser um “quebra gelo”. Explicaremos as regras e deixaremos que eles se divirtam. No entanto, durante o momento, sempre haverá um docente observando a atividade para esclarecer dúvidas que surgiram e incentivar a interação entre os alunos.

(Equivalência de frações)

1. (OBMEP adaptado) Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados, quantos destes quadrados tem área sombreada igual à ¼ de sua área? Por quê?



Para o professor: permitir que resolvam juntos; os professores devem acompanhar os grupos para averiguar dúvidas. Em seguida, convidar os alunos a apresentarem suas resoluções no quadro, comentar suas resoluções e formalizar. Tomar a resolução que todos concordem ser verdadeira. (15 minutos)

Resolução: Todos os quadrados têm área sombreada igual a ¼ de sua área, apenas foram representados de forma diferente, mas, ao manipulá-las, verifica-se que a área sombreada de todos, representa ¼ de sua área.

(Equivalência de frações e representação decimal)

2. (Enem 2021 - Adaptada) Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: 3/5, 1/4, 2/3 e 5/9. Qual foi a ordem apresentada pelo aluno?

<u>Para o professor:</u> permitir que resolvam juntos; os professores devem acompanhar os grupos para averiguar dúvidas. Em seguida, convidar os alunos a ordenarem essas frações em um varal e, após, ordenar mais algumas que serão dadas. 20 minutos.

(Soma de frações)

3. Eu estava viajando com a minha sogra. Percorremos ⅖ da estrada e paramos para almoçar. Depois, percorri mais ¼ do trecho restante. Aí lembrei-me que tinha esquecido minha sogra no restaurante. Voltei, peguei minha sogra e percorri mais ½ do total da estrada até parar para jantar. Considerando toda a distância que percorri, já andei mais que o comprimento de toda estrada. Apesar disso, ainda não cheguei ao final dela. Qual fração da estrada ainda temos pela frente?
Que fração representa o que andei mais que o comprimento da estrada?

<u>Para o professor:</u> permitir que resolvam juntos; os professores devem acompanhar os grupos para averiguar dúvidas. Em seguida, convidar os alunos a apresentarem suas resoluções no quadro, comentar suas resoluções e formalizar **(utilizar a folha transparência com marcadores de quadro branco para mostrar de forma visual o processo de encontrar frações equivalentes para soma ou multiplicação de frações)** o conceito de ordem de frações e tomar a resolução que todos concordem ser verdadeira (30 minutos).

Resolução: Modelando matematicamente, temos uma posição na estrada correspondente ao caminho percorrido de $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$. Portanto, o trecho que falta corresponde à $\frac{1}{10}$ da estrada. Mas, se considerarmos a distância percorrida, temos que foi percorrido $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{12}{10}$. Portanto, foi percorrido $\frac{2}{10}$ a mais que o total da estrada.

(Proporção)

4. Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando em uma partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feitos pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

Para o professor: Permitir que resolvam juntos; os professores devem acompanhar os grupos para averiguar dúvidas. Em seguida, convidar os alunos a apresentarem suas resoluções no quadro, comentar suas resoluções e formalizar **(fazer perguntas para abordar o conceito de porcentagem "De que forma foi possível determinar qual jogador era a melhor escolha?")** o conceito de razão e proporção, tomar a resolução que todos concordem ser verdadeira (30 minutos).

Resolução: Para o jogador I, sabemos que ele acertou 45/60 gols, o que equivale a 3/4. Já para o jogador II, sabemos que ele acertou 50/75 gols, e a fração equivalente seria 2/3. Como $2/3<3/4$, a melhor escolha seria o jogador I que teve uma porcentagem maior de sucesso.

5. Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias.Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas já adquiridas seria suficiente para um número de quantos dias?

Para o professor: permitir que resolvam juntos; os professores devem acompanhar os grupos para averiguar dúvidas. Em seguida, convidar os alunos a apresentarem suas resoluções no quadro, comentar suas resoluções e formalizar o conceito de fração como parte de um todo e tomar a resolução que todos concordem ser verdadeira (30 minutos).

Resolução: Como a empresa disponibiliza apenas o almoço, então seriam 750 empregados x nº de dias:

$$750 \times 25 = 18.750 \text{ marmitas.}$$

Se a empresa tivesse mais 500 empregados seriam 1250 empregados, com esse total podemos dividir o nº de marmitas que descobrimos antes e dividir pelo total de empregados:

$$\frac{18750}{1250} = 15 \text{ dias.}$$

Referências Bibliográficas:

ASTH, Rafael. Exercícios de Frações. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-fracoes/. Acesso em: 10 set. 2023
DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, 2005. 490 p.
Silveira, Ênio **Matemática** : compreensão e prática : manual do professor / Ênio Silveira. – 5. ed. – São Paulo : Moderna, 2018.

1.1.2. Relatório

Aos dezesseis dias do mês de setembro de 2023, nós, Ruan Gallio, Eduardo Zeni, Shimmer Alves, Milena Yumi, junto ao professor orientador Amarildo de Vicente, nos reunimos para o primeiro encontro do PROMAT.

Iniciamos a aula com 22 alunos e uma atividade de apresentação verbal entre eles, junto com uma conversa e apresentação dos estagiários para a turma. Feita essa breve introdução, não houve perguntas por parte dos alunos. Acreditamos que os alunos ainda buscavam entender como a aula iria ocorrer. Em virtude disso, para dar sequência, separamos os alunos em cinco grupos, sendo quatro destes grupos compostos por cinco alunos e um contendo dois alunos e dois professores, para conseguir fechar um número que julgamos ideal para cada atividade que se decorreu em sequência: o jogo de dorminhoco das frações.

Este jogo consiste em montar quartetos de frações equivalentes, representadas de diferentes formas (frações com números por extenso, algébrica e geométrica, no caso uma das formas se repete uma vez para formar o quarteto) e então "abaixar sua mão", onde o jogador informa que completou sua mão e venceu. No decorrer do jogo, os dois professores que não estavam em um grupo caminharam pela sala auxiliando os demais grupos com o decorrer do jogo e incentivando reflexões sobre a equivalência de frações. Além do mais, esse momento foi também um de socialização para os alunos e de "quebra gelo" para o decorrer das atividades seguintes.

O jogo durou por uma hora, tendo alguns grupos jogado até quatro rodadas. Percebeu-se que, após certo tempo percorrido e os alunos se sentido mais confortáveis com o ambiente de sala e, principalmente, com seus colegas, houve bastante diversão e interação. Assim, o objetivo da atividade lúdica foi alcançado. De qualquer forma, notou-se bastante diversidade no nível de conhecimento entre os grupos e, nestes, houve maior ajuda dos professores e mais "rodadas de aquecimento" mas, de qualquer forma, o jogo seguiu sem problemas.

No entanto, notamos que parte das dificuldades dos estudantes estava presente na transformação entre os diferentes tipos de representações. Para auxiliar com esse desafio, durante a partida, os professores algumas vezes pararam para exemplificar com frações mais intuitivas (Como $\frac{1}{2}$ é um desenho de dois quadrados com apenas um colorido) além de reiniciar algumas partidas para que um aluno conseguisse acompanhar a rodada sem se confundir.

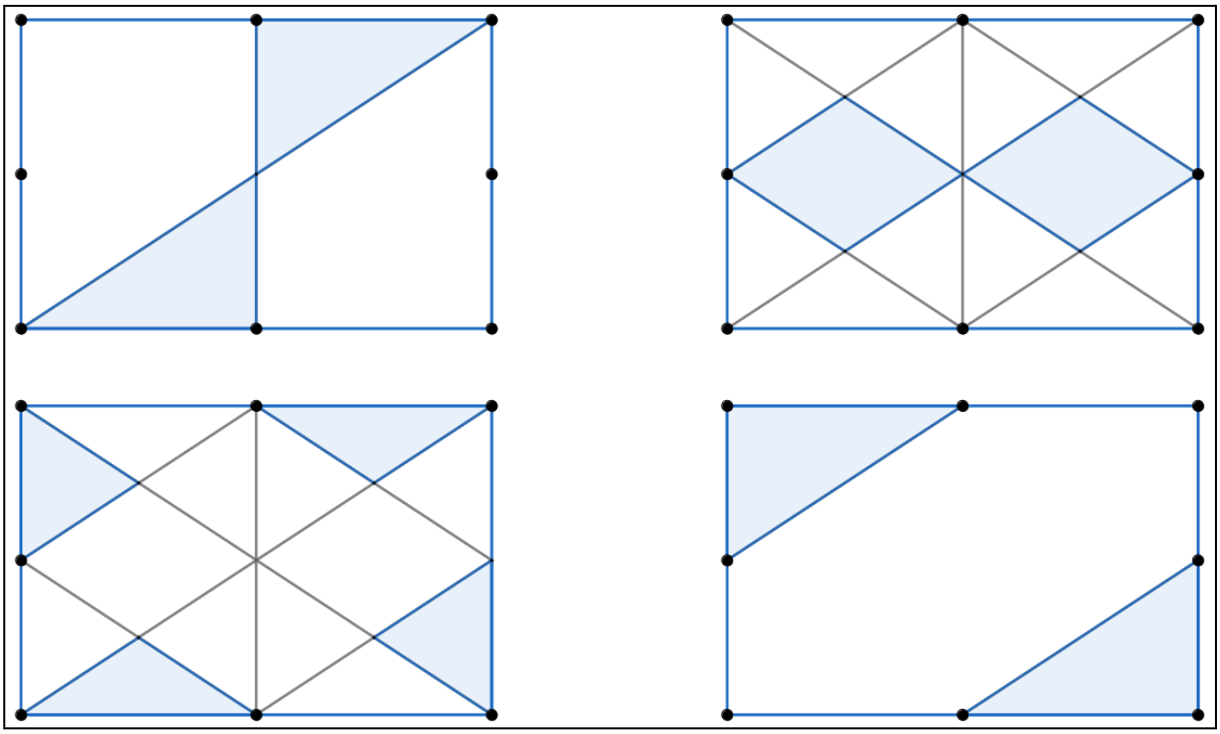
Em seguida, conversamos sobre como pretendíamos lecionar a aula e comentamos brevemente sobre o trabalho do matemático além da sala de aula como professor, sobre a busca por soluções gerais e o papel da argumentação matemática sobre um tópico, otimizações, e, em seguida, apresentamos a ideia de resolução de problemas. Enfatizamos que nosso objetivo para com os alunos não era a resposta final, mas sim gerar uma discussão entre os alunos e a compressão do porquê de cada solução ser válida. Dessa forma, o objetivo das discussões após cada problema era para que eles mesmo se convencessem com a solução obtida.

Assim, mantendo os mesmos grupos do jogo do dorminhoco (salvo os dois alunos que jogaram com os professores, que cada um foi para um grupo de sua escolha), foi projetado em forma de *slide* a primeira questão do plano de aula e, então, os grupos foram deixados sozinhos para discutirem entre si. Como eram quatro grupos, cada professor ficou com um grupo fixo. Ajudando-os a fazerem as perguntas certas (conversadas pelos professores na elaboração sobre ideias gerais que cada problema abrange, e quais caminhos os alunos podem tomar), buscando, como na dialética maiêutica, guiá-los sem forçá-los a uma solução a partir de seus próprios conhecimentos.

Tal atividade tomou mais tempo do que o planejado inicialmente. Percebeu-se que enquanto alguns dos alunos tiveram facilidade em encontrar a resposta, outros tiveram dificuldades. Mas mesmo aqueles que rapidamente encontraram as soluções conseguiram extrair – dado ajuda dos professores, com perguntas que buscavam maior profundidade – outras informações relacionadas ao problema, como outras formas de encontrar a resposta, ou análises de como seria se tais imagens estivesse presente no conjunto de cartas do jogo do dorminhoco.

Nesta atividade, percebeu-se uma dificuldade com certos grupos mais visuais por causa da formatação das imagens, em que causaram dificuldades de perceber que era, de fato, um quadrado.

Figura 3 - Exercício sobre frações visuais



Fonte: Os autores.

Passados 30 minutos, todos haviam entrado em consenso entre seus grupos e foi realizada uma discussão geral com a turma, onde foi pedido para que cada grupo mostrasse como resolveu. Nesse momento, dois alunos foram ao quadro explicar suas soluções.

Após essa atividade, houve o momento de intervalo e, ao retornarem, foi apresentada em *slide* a questão dois do plano de aula:

> (Enem 2021 - Adaptada) "Um jogo pedagógico é formado por cartas nas quais está impressa uma fração em uma de suas faces. Cada jogador recebe quatro cartas e vence aquele que primeiro consegue ordenar crescentemente suas cartas pelas respectivas frações impressas. O vencedor foi o aluno que recebeu as cartas com as frações: 3/5, 1/4, 2/3 e 5/9. Qual foi a ordem apresentada pelo aluno?"

Mais uma vez os grupos tiveram a oportunidade de discutir sobre a questão. A maioria dos alunos tomou como resolução a divisão dos números das frações para encontrar sua forma decimal e assim comparar seus valores. Alguns se arriscaram, depois de encontrar a resposta por este caminho e com o incentivo dos professores, a encontrar a solução de outras formas, como por exemplo tentando encontrar frações equivalentes às dadas todas com denominador comum para comparar seu numerador.

Depois de 15 minutos, todos os grupos já haviam chegado em um consenso, então os professores iniciaram o processo de resolução como turma, utilizando o varal de frações, onde os professores discutiam com os alunos onde as frações da questão dois (de forma crescente) deveriam ficar. Depois de organizadas as primeiras frações, os professores distribuíram quatro novas frações para cada grupo para serem organizadas da mesma forma no varal de frações. A cada rodada, os grupos discutiam onde uma de suas frações deveria ser colocada e um aluno ia ao quadro posicioná-la em seu lugar. Houve uma vontade da parte dos alunos de usar a calculadora, mas os professores pediram para que fossem guardadas, para incentivá-los a fazerem os cálculos por si mesmos.

Esta atividade foi realizada em 25 minutos e foi utilizada para apontar o conceito de frações próprias e impróprias, em que uma fração representará um número entre zero e um quando seu numerador for menor que o denominador, e representará um número maior do que um quando o numerador for maior que seu denominador.

Em seguida, a questão três foi apresentada com o *slide*. Como a questão é extensa, os professores precisam estar mais atentos às possíveis dúvidas para ajudar na interpretação, sem dar indícios da resposta, tentando ajudá-los a lembrarem-se do jogo dorminhoco, em que precisavam encontrar frações equivalentes para que pudessem perceber como utilizar este conceito poderia ajudá-los a resolver o problema. Este foi um exercício em que se observou mais dificuldade de abstração do que os feitos até então, em que alguns alunos conseguiram encontrar uma resolução, mas outros não. Assim, os estagiários acreditam que isso aconteceu, em parte, por dificuldade de interpretação do texto do problema. Em seguida, para promover a compreensão de todos os membros do grupo, incentivaram aqueles que conseguiram notar uma solução a descrever seu raciocínio com seus colegas que estavam com mais dificuldade e, no final, observou-se que houve compreensão, pelo menos, da ideia geral da solução.

Como a discussão da questão três entre os alunos levou 35 minutos, ao término da discussão em grupo desta questão,restavam apenas cinco minutos para o fim da aula, portanto não houve tempo de finalizar todas as cinco questões propostas no plano de aula. Os professores então distribuíram uma lista de exercícios para os alunos levarem como tarefa, enfatizando não ser obrigatória, mas fortemente recomendada, de ser resolvida o máximo que conseguissem, para trazerem dúvidas para a próxima aula.

Ao final, os professores não conseguiram aplicar dois dos problemas propostos, não trabalhando o conteúdo de proporção entre diferentes grandezas. Algo que, de qualquer forma, os professores não acreditam que afetaria tanto, dado que a aula seguinte estava planejada para a revisão desse conteúdo. Finalmente, concluímos que os alunos se interessaram na aula e saíram deste primeiro encontro com um maior conhecimento de frações do que quando entraram e, juntamente com os professores, foi um momento proveitoso e de aprendizado.

Estávamos nos acostumando à experiência em sala de aula, visto que tivemos poucas oportunidades de realmente dar uma aula. Conseguimos manter o foco, nos enturmar bem com os alunos e criar um primeiro momento de contato. Percebemos que o tempo avança mais rápido do que planejamos, mas, mesmo assim, a atividade prática funcionou bem, porém, se estendeu por uma hora e meia, o dobro do que havíamos estipulado. Finalmente, aprendemos que o sucesso de uma atividade proposta, como o Jogo do Dorminhoco, depende de que a atividade seja facilmente compreendida e do tempo dado para os alunos, de forma que consigam se divertir e, ao mesmo tempo, entender as nuances do jogo e o motivo dele ser aplicado.

1.1.3. Materiais utilizados

- LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que 1/4 dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto 2/3 das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens.
   Qual é a fração que representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa?

2. Qual o valor da soma a seguir?
   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \bullet 3} + \frac{1}{3 \bullet 4} + \frac{1}{4 \bullet 5} + \ldots + \frac{1}{19 \bullet 20}$

3. Vitor e seu pai estão fazendo um bolo. Na receita para seis pessoas vão: $\frac{1}{2}$ xícara de açúcar, 150 g de farinha e $1\frac{1}{4}$ copo de leite. Se esta receita for feita para quatro pessoas, qual será a quantidade de cada um desses ingredientes?

4. Aumentando-se a base e a altura de um retângulo em 20%, em que porcentagem a área aumenta?

5. Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais de 500 empregados, a quantidade de marmitas já adquiridas seria suficiente para um número de quantos dias?

6. Você sabia que os estados de Santa Catarina e Paraná têm suas áreas aproximadas respectivamente iguais a $\frac{4}{25}$ e $\frac{7}{20}$ da área da região Sul do Brasil?

7. Patrícia depositou $\frac{1}{6}$ de seu salário na poupança e usou $\frac{1}{10}$ do que sobrou para pagar o aluguel de sua casa. O aluguel consome qual fração de seu salário?

8. Um navio que trazia um grande número de especiarias enfrentou uma tempestade violenta: a embarcação teria sido destruída pela fúria das ondas se não fosse a bravura de 3 marinheiros. O comandante, querendo recompensar os denodados marujos, deu-lhes certo número de moedas. Esse número, superior a duzentos , não chegava a trezentos.

   As moedas foram colocadas numa caixa para que no dia seguinte, por ocasião do desembarque, as repartisse entre os três corajosos marinheiros. Aconteceu, porém, que durante a noite, um dos marinheiros acordou, lembrou-se das moedas e pensou: "Será melhor que eu tire a minha parte. Assim não terei ocasião de discutir ou brigar com meus amigos". E, sem nada dizer aos companheiros, foi até onde se achava guardado o dinheiro, dividiu-o em três partes iguais, mas notou que a divisão não era exata e que sobrava uma moeda. "Por causa desta mísera moedinha é capaz de haver discussão amanhã." E o marinheiro atirou a moeda ao mar. Horas depois o segundo marinheiro teve a mesma ideia. Também em sua divisão sobrava uma moeda. Como o primeiro, jogou-a ao mar. O terceiro marinheiro, ignorando por completo a antecipação dos companheiros, teve a mesma atitude. Dividiu as moedas e também em sua conta sobrava uma. Também não querendo complicar o caso, jogou-a ao mar.

   No dia seguinte, no desembarque, o almoxarife encontrou um punhado de moedas na caixa, soube que pertenciam aos marinheiros e dividiu-as em três partes iguais. Ainda dessa vez a divisão não foi exata, pois sobrava uma moeda. O almoxarife guardou esta como paga do seu trabalho. Quantas eram as moedas inicialmente e quantas moedas cada marujo levou?

1.2. ENCONTRO 2 – 23/09/2023

1.2.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Razão e proporção, raiz e potência

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: Desenvolver a compreensão dos alunos sobre os conceitos fundamentais de razão e proporção, apresentar propriedades de potências.

Objetivos específicos:

- Compreender o conceito de razão e proporção e reconhecer situações onde tais conceitos são aplicáveis;
- Entender a relação entre raiz e potência e distinguir onde cada uma se aplica.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, torre de hanoi, folha sulfite.

Encaminhamentos metodológico:

- Deixar a sala organizada em grupos de 5 e 6 carteiras para que os alunos cheguem e já se separem em grupos;
- Abrir o tempo para que os alunos tirem as dúvidas em relação à lista de exercícios da aula anterior. Cada professor ficará responsável por tirar as dúvidas de um grupo por 15 minutos;
- Entregar lista de 3 exercícios para resolução em grupo sobre razão e proporção, para introduzir os conceitos de acordo com a necessidade de cada grupo;
- Verificar o progresso dos grupos com os problemas, ajudando-os a resolver o problema de forma colaborativa;
- Entregar as torres de Hanói e os deixarem fazerem suas próprias conclusões sobre o formato que o número mínimo de movimentos cresce;
- Explicar o conteúdo com auxílio dos *slides* e do quadro, dando exemplos e tempo para que eles copiem;
- Dar uma lista de exercícios para concretizar o ensino.

Atividade inicial (45 minutos)

1. Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais de 500 empregados, a quantidade de marmitas já adquiridas seria suficiente para um número de quantos dias?

Resolução: Como a empresa disponibiliza apenas o almoço, então seriam 750 empregados x nº de dias:

$750 \times 25 = 18.750$ marmitas.

Se a empresa tivesse mais 500 empregados seriam 1250 empregados, com esse total podemos dividir o nº de marmitas que descobrimos antes e dividir pelo total de empregados:

$\frac{18750}{1250} = 15$ dias.

2. (UNIOESTE 2021 - modificada) Para fazer 800 ml de um produto, deve-se misturar 100 ml da substância A1, 200 ml da substância A2 e 500 ml da substância A3. Deseja-se aumentar o tamanho da embalagem e o produto agora deverá ter 900 ml. Assim, para manter a proporcionalidade entre as substâncias A1, A2 e A3, quais serão as quantidades das substâncias usadas (em ml)?

Resolução:

A1: $\frac{100}{800}=\frac{x}{900}$

$$x = \frac{90.000}{800}$$

$$x = 112,5$$

A2: $\frac{200}{800}=\frac{y}{900}$

$$y = \frac{180.000}{800}$$

$$y = 225$$

A3: $\frac{500}{800}=\frac{z}{900}$

$$z = \frac{450.000}{800}$$

$$z = 562,5$$

3. Em uma seleção, a razão entre o número de homens e mulheres candidatos a vaga é 4/7. Sabendo que 32 candidatos são do sexo masculino, qual é o número total de participantes?

Resolução:

Primeiramente, calculamos, através da regra fundamental da proporção, o número de mulheres na seleção:

$$\frac{4}{7} = \frac{32}{x}$$

$$4x = 32.7$$

$$x = \frac{224}{4}$$

$$x = 56$$

Agora, somamos o número de homens e mulheres para encontrarmos o total de participantes:

$$56 + 32 = 88$$

Atividade com a Torre de Hanói (30-40 minutos)

Distribuir para cada grupo Torres de Hanói e pedir para que descubram a quantidade mínima de movimentos dada uma quantidade de peças. Os professores, nesse período, rodeiam os grupos e, em momentos oportunos, fazem questionamentos que os direcionam na ideia de potência.

Quadro 4- Molde para torre de hanói

Quantidade de peças	**Número mínimo de movimentos**	**Possível fórmula para saber o número mínimo de movimentos**
1		
2		
3		

4		
5		

Fonte: Elaborado pelos autores

Após a atividade com torres de Hanói, os professores lecionam uma aula mais "tradicional". Ou seja, serão passadas definições das propriedades de potências. Após cada potência, existe um pequeno exemplo, o qual será oferecida uma oportunidade para caso algum aluno queira responder, senão, serão os professores.

A **potenciação** corresponde a uma multiplicação de fatores iguais. Pensamos em um caso

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

- A **base** é o fator que se repete. No exemplo, a base é o 2, que é o número que se repete;
- O **expoente** indica quantas vezes o fator se repete,. No exemplo o 3 é o expoente, pois o 2 se repete 3 vezes;
- A **potência** é o produto de fatores iguais.

Propriedades da Potenciação

Potências negativas Como é visto no exemplo, a potência é a quantidade de vezes que a base é multiplicada por si mesma. Mas existem potências em que o expoente é negativo. Como um número negativo é o oposto de um positivo, é válido pensar que, quando a potência é negativa, ao invés de ser a quantidade de vezes que a base é multiplicada por si mesma, será 1 dividido pela base a quantidade de vezes do expoente.
Exemplo: Quanto é 2^{-3}? $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

Produto de potências
A ideia é expandir a potência, repetindo a base no número de vezes indicadas pelo expoente separadamente e contar a nova quantidade total de vezes. $a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot a \cdot ...\, (m\, vezes) ... \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot ...\, (n\, vezes) ... \cdot a) = a^{m+n}$
Exemplo: Quanto é $3^2 \cdot 3^3$?
$3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3.3.3.3.3 = 3^5 = 3^{2+3}$

Divisão de potências da mesma base:
A ideia é expandir a potência no numerador e denominador e simplificar os termos. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{(a \cdot a \cdot a \cdot ...(m\, vezes)...\cdot a)}{(a \cdot a \cdot a \cdot ...(n\, vezes)...\cdot a)} = a^{m-n}$
Exemplo: Quanto é $\frac{3^4}{3^2}$?
$\frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3}{1} = 9 = 3^2 = 3^{4-2}$

Potência de potências:
A ideia é expandir a potência em forma de multiplicação, e usar da propriedade de multiplicação de potências para simplificar. $(x^m)^n = x^m \cdot x^m \cdot ...\,(n\, vezes)... \cdot x^m = x^{m+m+m+...(n\, vezes)...+m} = x^{m \cdot n}$
Exemplo: Quanto é $(5^3)^2$?
$(5^3)^2 = (5^3 . 5^3) = 5^{3+3} = 5^{2.3} = 5^6$

Potência do produto: A ideia é expandir a potência como uma multiplicação e agrupar os termos similares $(a \cdot b)^m = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot ...(m\, vezes)...\ a \cdot b = a^m \cdot b^m$
Exemplo: Quanto é $(3 \cdot 5)^3$? $(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5^3 = 27 * 125 = 3.375$

Potência de frações: A ideia é expandir a potência em forma de multiplicação no numerador e denominador, e agrupar os termos similares. $(\frac{a}{b})^m = (\frac{a}{b}) \cdot (\frac{a}{b}) \cdot ...(m\, vezes)...\ (\frac{a}{b}) = (\frac{a^m}{b^m})$
Exemplo: Quanto é $(\frac{5}{4})^4$ $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{5^4}{4^4}$

Potência de grau 1 Perceba que um número elevado à 1 é apenas ele: $a^1 = a$.
Potência de grau 0 Perceba que qualquer número diferente de 0 elevado à 0 é sempre 1: $a^0 = 1$. Por exemplo, $6^4 = 6 . 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Fazendo o processo de divisão, encontramos

6^4	6^3	6^2	6^1	6^0	6^{-1}	6^{-2}
1296	216	36	6	1	1/6	1/6²

÷6. ÷6. ÷6. ÷6. ÷6. ÷6

Também podemos enxergar $a^0 = a^{1-1} = \frac{a}{a} = 1$

Potências racionais:

Por definição, $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$

Após serem passados essas definições, serão apresentados em forma de pequena lista os seguintes exercícios:

1. Verifique se as sentença são falsas ou verdadeiras:

$1)(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$ **(V)**

$2)(x + y)^4 = x^4 + y^4$ **(F)**

$3)(x - y)^4 = x^4 - y^4$ **(F)**

$4)(x + y)^0 = 1$ **(V)**

2. Sabendo que $x = 20^{100}$e $y = 400^{50}$. Qual a relação entre x e y?

Resposta: $20^{100} = (2.10)^{2.50} = (2^2.10^2)^{50} = (4.100)^{50} = 400^{50}$.

Portanto, $x = y$

3. Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

Resposta: $4^3 + 4^4 + 4^5$

Referências Bibliográficas:

Silveira, Ênio **Matemática** : compreensão e prática : manual do professor / Ênio Silveira. – 5. ed. – São Paulo : Moderna, 2018.

Exercícios de razão e proporção. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/razao-e-proporcao-exercicios/. Acesso em: 24 set. 2023

1.2.2. Relatório

No dia 23 do mês de setembro de 2023, os acadêmicos, Ruan Gallio, Eduardo Zeni, Shimmer Alves, Milena Yumi, acompanhados no primeiro período pelo professor Renato e, após o intervalo, pelo professor orientador Jean, reuniram-se no mesmo local da primeira aula para a segunda aula do Promat.

A aula começou com 11 alunos, número menor do que o da primeira aula. As carteiras foram organizadas para formar grupos, como foi feito no primeiro dia, porém os estudantes foram orientados a sentar com pessoas diferentes do primeiro dia. Contudo, não havia pessoas o suficiente então alguns grupos se repetiram.

Duas alunas, que não vieram no primeiro dia, foram à aula. Assim, foi entregue a elas a mesma lista de exercícios trabalhada na aula anterior e então foi feita a retomada dos exercícios que tinham sido deixados na semana anterior para eles. A retomada dos exercícios foi feita de forma individual, com cada professor conversando com alunos nas questões que eles tiveram dificuldades, mas buscando incentivar que os estudantes ajudassem uns aos outros. Percebeu-se nesses momentos que as duas alunas que não vieram no encontro anterior tinham facilidade com o conteúdo e apresentavam curiosidade sobre o assunto. Cerca de 45 minutos depois de resolver os exercícios, percebemos que não poderíamos demorar tanto nas revisões futuras, os alunos deixaram para fazer a lista na sala de aula e acabamos tomando muito do tempo. Após isso iniciou-se a apresentação do assunto do dia de potenciação e radiciação.

Como forma de introdução do conteúdo, utilizamos a torre de hanói. Explicamos como ela funcionava e quais eram as regras para as plaquetas serem movidas e que vencia quem fizesse a movimentação da torre para o lado com o menor número de movimentos. Escrevemos na lousa, então, o modelo do quadro 4 para ajudá-los a organizarem suas ideias.

No entanto, antes mesmo de eles começarem a mexer nas torres, a aula foi interrompida para o intervalo. Ao voltar, os alunos já estavam mais familiarizados com a atividade e percebeu-se que alguns deles estavam ansiosos para realizar as movimentações. Assim, sem precisar explicar novamente, os alunos já começaram a tentar possíveis movimentos, verificar os valores resultantes e realizar suas anotações. Por volta de uma hora de experimentos com as torres, alguns observaram que, com o número mínimo de movimentos obtido por *n* camadas, o número de movimentos para resolver com uma peça adicional, é o dobro do número mínimo do anterior, adicionado de 1. Foi pedido então que eles pensassem em algo mais generalizado e, se não soubessem o valor de movimentos mínimos, ou se estivesse errado o valor de movimentos mínimos, como eles poderiam contornar esse erro. Como o assunto era potenciação resolvemos dar uma ajuda e afunilar a resposta para alguma potência, continuamos instigando os alunos até sair o resultado de $2^n - 1$. Houve dificuldade nos primeiros momentos, compreender a regra principal de não sobrepor as placas de tamanho inferior. Ao final, a fórmula chegou por tentativa e erro, primeiro observaram as repetições, as semelhanças dos níveis anteriores e tentaram estimar para as próximas.

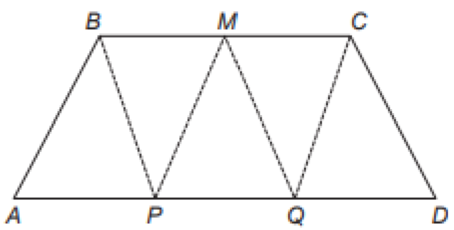
As explicações sobre as propriedades de potências foram desenvolvidas no quadro até o final da aula. No entanto, faltou postura ao quadro para poder falar de forma mais clara para os alunos, além de os professores não terem separado o que cada um ficaria responsável por falar, fazendo com que um professor fizesse um comentário em cima da fala de outro. Apesar de os alunos terem participado fazendo perguntas sobre as operações e solicitando outros exemplos de potências negativas e potências de expoente racional, os professores não estavam preparados com exemplos práticos para explicar de forma concisa, todos os exemplos, o que dificultou o desenvolvimento da aula, além de tomar mais tempo do que o previsto.

Nos minutos finais da aula, foi abordado o conteúdo de radiciação, mas por conta do tempo gasto a mais do que o previsto nas explicações das propriedades anteriores, a explicação foi superficial, tornando-se necessário utilizar 30 minutos da próxima aula para explicar a radiciação e retomar algum questionamento apontado pelos alunos. Em geral essa aula demonstrou a importância de nos organizarmos melhor para as próximas aulas, pois devido à falta de organização e preparo, a qualidade desta segunda aula foi menor que a primeira em nossa, e na opinião de nossos orientadores.

1.2.3. Materiais

- **Lista de exercícios**

1. No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, *M* é o ponto médio do segmento *BC*, e os pontos *P* e *Q* são obtidos dividindo o segmento *AD* em três partes iguais.



2. Pelos pontos *B, M, C, P* e *Q* são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura. A razão entre BC e AD que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é qual?

3. A razão entre livros de literatura e livros de matemática numa determinada biblioteca é 4/5. Sabe-se que há 200 livros de matemática atualmente. Se a biblioteca ganhar mais 60 livros de literatura, qual será a nova razão entre livros de literatura e matemática?

4. Um determinado concurso envolve uma prova teórica e uma prova prática. A nota final do candidato equivale a 40% da nota da prova teórica e 60% da nota da prova prática. As notas são atribuídas em uma escala de 0 a 10 pontos. Para ser aprovado no concurso, o candidato necessita obter nota final igual ou maior que 6,0. Ao tirar nota 4,5 na prova teórica, qual a nota mínima que um candidato deverá obter na prova prática, para ser aprovado no concurso?

5. Os números *a, b, c* são inteiros positivos tais que a ≤ b ≤ c. Se *b* é a média aritmética simples entre *a* e *c*, então qual o valor da razão $\frac{(b-a)}{(c-d)}$

6. A Dra. Judith sempre atende, no seu consultório, o mesmo número de pacientes a cada turno de quatro horas de trabalho. Ela percebeu que, gastando em média vinte e cinco minutos para atender cada paciente, sempre trabalha 1 hora além do seu expediente. Para que ela atenda o mesmo número de pacientes e cumpra exatamente o horário previsto para cada turno, o atendimento por cada paciente deve durar, em média, quantos minutos?

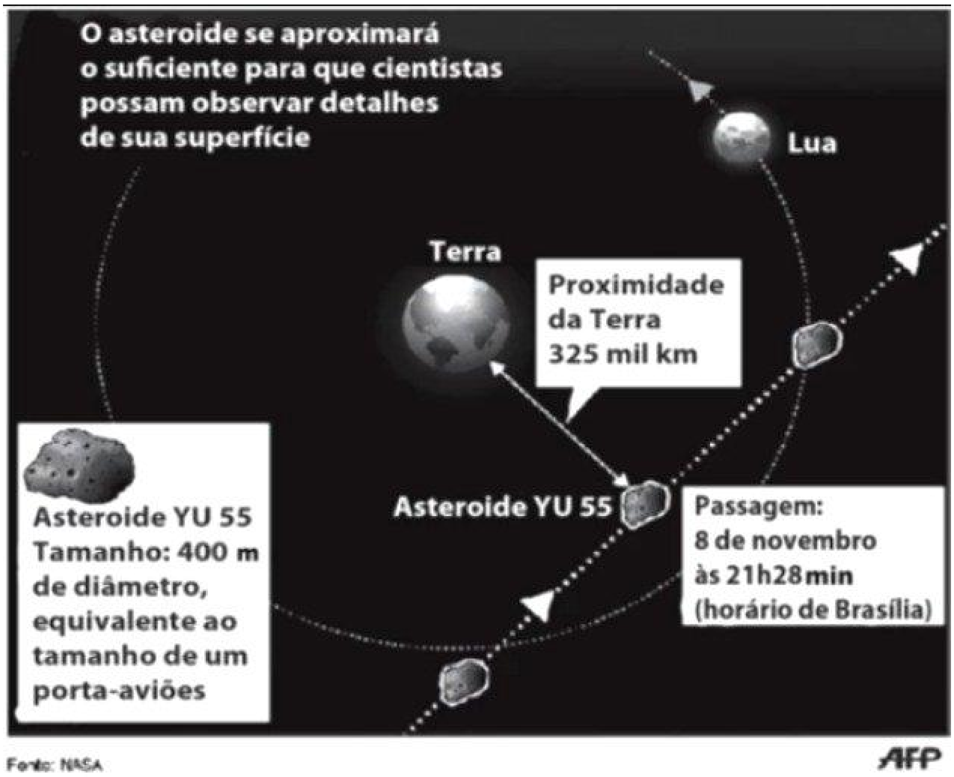
7. Considere 3 trabalhadores. O segundo e o terceiro, juntos, podem completar um trabalho em 12 dias. O primeiro e o terceiro, juntos, podem fazer o mesmo trabalho em 10 dias, enquanto que o primeiro e o segundo, juntos, podem fazê-lo em 15 dias. Em quantos dias, os três juntos podem fazer o mesmo trabalho?

8. O matemático americano Edward Kasner pediu ao filho que desse um nome a um número muito grande, que consistia do algarismo 1 seguido de 100 zeros.

Seu filho batizou o número de googol. Mais tarde, o mesmo matemático criou um número que apelidou de googolplex, que consistia em 10 elevado a um googol. Qual a quantidade de algarismos em um googolplex?

9. (UFRGS - 2015) Qual é o algarismo das unidades de 9^99 – 4^44?

10. (Enem - 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a?

11. (Enem - 2016) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organizou quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o

primeiro dia do evento. Qual é a representação possível do número esperado de participantes para o último dia?

12. Certo dia o rajá foi visitado por Sessa, que apresentou ao rajá um tabuleiro com 64 casas brancas e negras com diversas peças que representava a infantaria, a cavalaria, os carros de combate, os condutores de elefantes, o principal vizir e o próprio rajá. Sessa explicou que a prática do jogo daria conforto espiritual ao rajá, que finalmente encontraria a cura para a sua depressão, o que realmente ocorreu.
    O rajá, agradecido, insistiu para que Sessa aceitasse uma recompensa por sua invenção e o brâmane pediu simplesmente um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro, dois para a segunda, quatro para a terceira, oito para a quarta e assim sucessivamente até a última casa. Espantado com a modéstia do pedido, o rajá ordenou que fosse pago imediatamente a quantia em grãos que fora pedida.
    Depois que foram feitos os cálculos, os sábios do rajá ficaram atônitos com o resultado que a quantidade de grãos havia atingido. Por que isso? O que você teria feito nessa situação?

1.3. ENCONTRO 3 – 30/09/2023

1.3.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Equação e Sistemas;

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações do 1.º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade. Identificar e resolver equações do 1º grau. Construir procedimentos para determinar o valor desconhecido em uma equação do 1.º grau.

Objetivos específicos:

- Revisar métodos de resolução de equações do primeiro grau.
- Identificar a formação de pares ordenados como solução de sistema de equações;

- Resolver sistemas de equações usando os métodos de substituição, adição e comparação.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, folha sulfite, slides.

Encaminhamentos metodológico:

- Deixar a sala organizada em grupos de cinco e seis carteiras para que os alunos cheguem e já se separem em grupos;
- Abrir o tempo para que os alunos tirem as dúvidas em relação à lista de exercícios da aula anterior. Cada professor ficará responsável por tirar as dúvidas de um grupo por 20 minutos;
- Explicar as propriedades de potenciação e radiciação novamente para relembrar os alunos;
- Dar uma pequena lista de exercícios para que os alunos concretizem as ideais;
- Utilizar um *software* para demonstrar a ideia de igualdade com uma balança, dando tempo para os alunos aprenderem o funcionamento do *software*, e deixar aberto para que eles o utilizem;
- Dar problemas para os alunos resolverem em seus grupos, para que desenvolvam as ideias;
- Deixar que apresentem suas resoluções para a turma, para formalizar as ideias juntamente com ajuda dos docentes.

Retomada da aula anterior (40 minutos)

Em um primeiro momento, utilizaremos parte da aula para retomar o conteúdo de potenciação e radiação.

Passaremos novamente as propriedades de potenciação e radiciação em forma de slides e, em seguida, os seguintes exemplos em forma slides:

Exemplos

1. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo, justificando sua resposta:

a) $5^3 . 5^2 = 5^6$ (F)

b) $\frac{3^6}{3^2} = 3^2$ (F)

c) $2^3.3 = 6^3$(F)

d) $(2 + 3)^4 = 2^4 + 3^4$ (F)

e) $(5^3)^2 = 5^6$ (V)

f) $(-2)^6 = 2^6$ (V)

g) $\frac{2^7}{2^5} = (-2)^2$ (V)

2. Simplifique os radicais ou expressões a seguir:

a) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{576} = \sqrt{2^6.3^2} = \sqrt{2^6}.\sqrt{3^2} = 2^3.3 = 24$

c) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{2^2}.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{81x^3} = \sqrt[3]{3^3.3.x^3} = 3.\sqrt[3]{3}\ .x$

e) $\sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2^2.2^2.2} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Atividade inicial - Balança (30 minutos)

Utilizaremos o site https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_all.html?locale=pt_BR para auxiliá-los na ideia de manter uma igualdade entre os dois lados.

Para usar o site, primeiro deve ser preparado com os exemplos para serem demonstrados na aula, os exemplos que serão utilizados são, em ordem:

1) 2x = 4 (x = 2)
2) x + 6 = 3x - 6 (x = 6)
3) x + 9 = -2x - 6 (x = -5)
4) 2x - 5 = x + 7 (x = 12)

Fazendo o primeiro e segundo exemplos com eles, o valor da incógnita é escondido, e os outros dois são deixados como exercício. É recomendado o uso da ferramenta de “cadeado” da balança, que garante que deva ser feito a mesma coisa “de um lado” e “do outro”

Atividade Final - Problemas

Neste momento, passaremos em *slides* 4 problemas envolvendo equações e sistemas. Depois de cada resolução, deixaremos 10 minutos para discussão na sala, buscando que os alunos (caso se disponibilizem) resolvam no quadro. Se não, os orientadores irão coordenar essa solução.

1. Qual valor de x equilibra (resolve) equação –5(3x – 8) = –50?

Resposta: x=6

2. (Enem 2010) O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado. Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, qual será a distância que o atleta deve alcançar no primeiro salto para atingir sua meta?

Resolução: Considerando x como a distância desconhecida do primeiro salto, sabe-se que o segundo salto teve a distância de x – 1,2 e o terceiro salto teve alcance de x – 1,2 – 1,5, ou seja x – 2,7. Assim, para alcançar sua meta de 17,4m:

$x + (x - 1,2) + (x - 2,7) = 17,4$

$3x = 17,4 + 3,9$

$x = 21,2/3 = 7,1m$

A distância que o atleta deve alcançar no primeiro salto é de 7,1m.

3. (Enem Digital 2020) Provedores de conteúdos postam anúncios de empresas em seus *websites*. O provedor A cobra R$0,10 por clique feito no anúncio, além do pagamento de uma taxa de contratação de R$50,00. O provedor B cobra uma taxa de contratação por anúncio mais atrativa, no valor de R$20,00, mais um valor por clique feito no anúncio. Para um anúncio que receberá 100 cliques, o provedor B fixará uma proposta com

um valor a ser cobrado por clique, de modo que venha a receber, pelo menos, o mesmo total que receberia o provedor A. O gerente do provedor B deve avaliar os valores por clique a serem fixados.
Qual o valor que o gerente deve fixar por clique para que tenha o mesmo lucro que o provedor A?

Resolução: Para o provedor A temos

A: 0,10(100)+50 (para 100 cliques)

B: y(100)+20 (para 100 cliques)

100y+20=0,10(100)+50

100y= 10+50-20

y=40/100

y=0,40

O valor que deve ser fixado pelo gerente do provedor B para obter o mesmo lucro que o provedor A é de R$0,40.

4. Um estudante dispõe de até duas horas para executar determinadas tarefas de Matemática e Biologia. Sabe-se que para completar a tarefa de Matemática precisará de um tempo superior ou igual ao dobro do tempo necessário para completar a tarefa de Biologia.
Nessas condições, qual é o tempo máximo disponível para completar a tarefa de Biologia?

Resolução:

2 horas:120 minutos

M: tempo gasto na tarefa de matemática

B: tempo gasto na tarefa de biologia

Sabe-se que M=2B e M+B=120

Substituindo a primeira igualdade na segunda, temos

2B+B=120

3B=120

B=120/3

B=40

O tempo máximo disponível para completar a tarefa de biologia é de 40 minutos.

5. Um cavalo e um burro caminhavam juntos, carregando cada um pesados sacos. Como o cavalo reclamava muito de sua pesada carga. Sem muita paciência respondeu-lhe o burro:

- De que te queixas? Se tu me desse um saco seu, minha carga seria o dobro da sua, mas, se eu te der um de meus sacos sua carga será igual a minha.

Quantos sacos cada um levava?

Resolução: O burro levava 3 e o cavalo leva 2.

Carga do Cavalo: x

Carga do Burro: y

$$y+1=2x$$
$$x+1=y$$

$$2x-y=1$$
$$x-y=-1$$

$$x=2$$
$$y=3$$

1.3.2. Relatório

Na manhã do dia 30 de setembro os professores Ruan, Shimmer e Milena, iniciaram a aula e o professor Eduardo chegou 15 minutos atrasado por problemas internos. A aula começou com a retomada dos exercícios da aula anterior. Observou-se que os alunos voltaram às aulas, apesar da suspeita de que alguns poderiam ter desistido. Muitos deles alegaram ter faltado por conta da falta de transporte. Assim, tivemos 15 alunos nesse dia.

Ao perguntar aos alunos sobre dúvidas da lista de exercícios, verificou-se que, em sua maioria, não haviam feito os exercícios propostos. Os professores no momento acharam que seria conveniente deixar alguns minutos para que eles dessem uma olhada nos exercícios para tentar fazer algum, mas passados 40 minutos, percebeu-se que não foi uma boa ideia, pois tomou muito tempo, além de não ter sido tão proveitoso. Eles iniciaram os exercícios do zero, logo não foram sanadas dúvidas, foram apenas perguntas de interpretação para iniciar a resolução dos exercícios. As principais dúvidas estavam na interpretação do texto problema, entender o que a questão estava solicitando. Uma das perguntas era relacionada a vida de Diofanto que gerou bastante alvoroço pois era bem lúdica e detalhada, o que causou um certo desconforto nos alunos pela complexidade da questão.

Depois de trabalhar os exercícios, a proposta da aula foi de revisar o conteúdo de potência e de radiciação, já que não tinha ficado claro, nem tinham sido trabalhados exercícios em sala na aula anterior para que os alunos resolvessem sozinhos. Esta proposta demorou mais tempo do que o esperado, tomando toda a primeira parte da aula antes do intervalo. Houve alguns erros que os professores não perceberam nos *slides*, que tiveram que ser corrigidos no quadro, mas foi possível contornar este imprevisto sem problemas. Durante a resolução dos exercícios, os professores acompanharam os grupos relembrando as propriedades que tinham sido vistas. Os alunos tiveram um pouco de dificuldade de assimilar o conceito de potência em relação às raízes. Quando era necessário calcular as raízes eles tinham facilidade, entretanto, ao tratar-se de formas mais simbólicas (tais como uma raiz de uma incógnita elevada a uma potência), eles tiveram dificuldade.

Após o intervalo, introduziu-se o conteúdo a ser estudado de equações. Ao serem questionados se eles conheciam o conceito, e se estavam familiarizados com o assunto, poucos afirmaram com a cabeça que sim. Iniciou-se então a atividade da balança. Pelo site phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_all.html?locale=pt_BR, o professor Shimmer utilizou o recurso virtual para realizar algumas manipulações apresentando para todos com o projetor, pedindo para que participassem juntos na resolução das equações propostas. Ao mesmo tempo explicou e corrigiu as expressões utilizadas ao resolver equações tais como “passar para o outro lado subtraindo” na verdade significa subtrair certo valor de ambos os lados, ou então “se está dividindo passa multiplicando”; na verdade está multiplicando ou dividindo os valores de ambos os lados de igualdade para manter o equilíbrio da balança (equação) entre outras manipulações que geralmente são despercebidas, mas têm sentido algébrico. Os alunos, em seguida, foram orientados a acessarem o *site* pelos seus celulares e resolver algumas equações propostas no próprio *site*. Com esta atividade os professores observaram que vários alunos fizeram exclamações durante a resolução utilizando a balança, dizendo “Ah! Entendi agora o porquê de algum valor desse lado sumir, mas aparecer do outro…” . Percebeu-se que a atividade foi positiva, sendo necessárias algumas manipulações, mas o significado das operações realizadas dentro de uma equação ficaram mais claras para os alunos, que não expressaram dúvidas em um momento inicial sobre a atividade.

Ao término da atividade da balança, iniciou-se o momento de realizarem exercícios. O professor Eduardo apresentou os exercícios, explicando de forma geral o contexto de cada um deles. O primeiro foi um exercício do tipo “resolva”. Como esperado, alguns tiveram mais facilidade, outros ficaram em dúvida em alguns momentos sobre quais operações estavam sendo feitas para poderem somar, subtrair, dividir ou multiplicar dos dois lados (e não “passar” para o outro lado apenas). Foi preciso revisar este conceito algumas vezes mais com os alunos para fixar bem esta ideia.

Em seguida foram apresentados dois problemas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que estavam contextualizados. Os professores notaram que, para o primeiro problema, os alunos entenderam bem o método de resolução de equação do primeiro grau, mas tiveram dificuldade de interpretação, para fazer a transcrição do problema escrito em linguagem natural para a linguagem algébrica. Foi necessário cada professor acompanhar de perto o raciocínio de cada grupo de alunos para auxiliar. Duas alunas conseguiram resolver com mais facilidade o problema, sem muita interferência dos professores, e uma delas se disponibilizou a resolver o exercício no quadro. Ela explicou corretamente, de forma organizada no quadro. No entanto, ainda utilizou a expressão “passar para o outro lado” ao explicar, o que foi corrigido pelo professor Ruan, que a lembrou de que o conceito é “somar dos dois lados da igualdade”.

Apesar de a explicação ter sido correta, ao serem questionados se entenderam a explicação da colega, a maioria dos alunos respondeu que não. A professora Milena então usou a explicação da aluna pronta no quadro para fazer apontamentos mais detalhados do que os que tinham sido feitos, voltando ao enunciado para interpretar o que cada termo da equação significava no problema. Após a explicação, os alunos demonstraram que conseguiram compreender.

Já próximo do fim da aula, foi possível fazer o terceiro exercício, que foi resolvido com mais facilidade pelos alunos. O problema consistia em igualar os gastos de duas empresas de anúncios na *web*. Os alunos tiveram algumas dúvidas de onde começar. A dificuldade na interpretação e escrita na forma algébrica ocorreu por conta da questão ser contextualizada (ENEM), mas no final, os próprios alunos foram se ajudando para resolver a questão.

Não foi possível finalizar os cinco exercícios propostos pelos professores que tinham a intenção de introduzir ainda nesta aula sistemas de equações do primeiro grau, mas verificou-se que foi proveitoso, contando com a participação de todos os alunos, assim sendo possível verificar a compreensão de cada um. A ideia principal que tínhamos em mente teve sucesso: fazer com que os alunos tivessem a ideia mais formalizada de o que os procedimentos algébricos significam, e de onde as falas populares de “passar para o outro lado” vêm.

1.3.3. Materiais utilizados

- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. Uma quantidade e a sua metade adicionadas dão dezesseis. Qual é a quantidade?

2. Uma quantidade cuja quarta parte lhe é adicionada resulta em 15. Qual é a quantidade?

3. Uma quantidade cuja quinta parte lhe é adicionada resulta em 21. Qual é a quantidade?

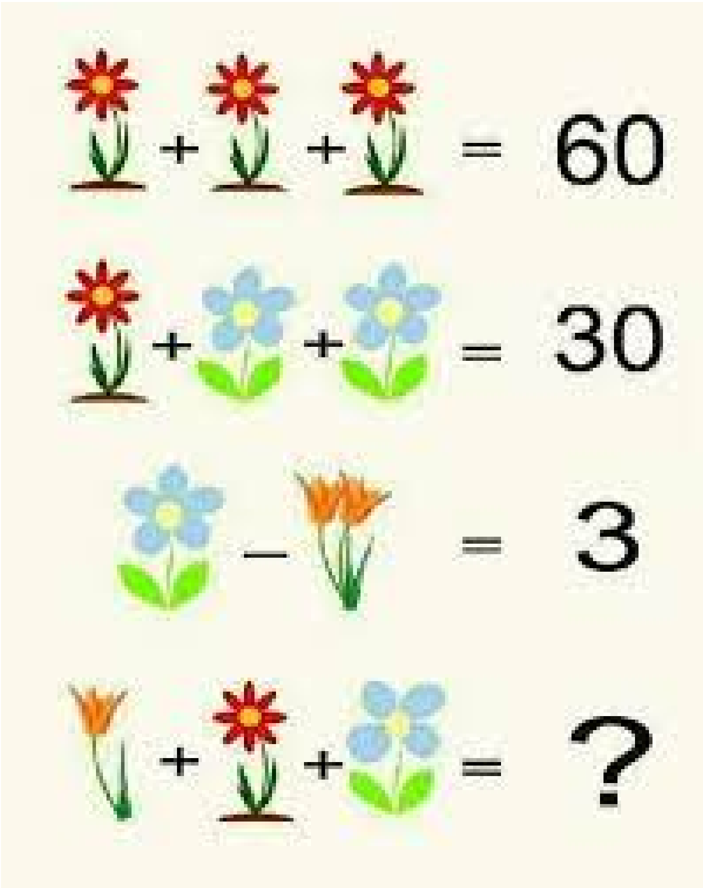
4. Na equação $7x – 5 = 5.(x + 9) – 28$, o equilíbrio (a igualdade) se estabelece entre os dois membros na presença de um valor determinado de x, usualmente chamado de solução da equação. Atribuindo a x, não o valor que corresponde à solução da equação, mas um valor 6 unidades menor que a solução dessa equação, obtém-se uma diferença numérica entre os dois membros da equação original, que, em valor absoluto, é igual a

5. Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto. E os números podem, ó milagre! revelar quão dilatada foi sua vida, cuja sexta parte constitui sua linda infância. Transcorreu uma duodécima parte de sua vida, quando seu

queixo se cobriu de penugem. A sétima parte de sua existência, transcorreu num matrimônio estéril. Passado um quinquênio, fê-lo feliz o nascimento de seu precioso primogênito, o qual entregou seu corpo, sua formosa existência, que durou a metade da de seu pai, à Terra. E com dor profunda desceu à sepultura, tendo sobrevivido quatro anos ao falecimento de seu filho.
Diz-me quantos anos vivera Diofanto quando lhe sobreveio a morte.

6. (Puc-rio) Ache sete números inteiros consecutivos tais que a soma dos primeiros quatro seja igual a soma dos últimos 3.

7. Responda o enigma a seguir, encontrado o valor das flores:



1.4. ENCONTRO 4 – 07/10/2023

1.4.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Sistemas de equação do primeiro grau e equação do segundo grau;

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados a diferentes contextos e/ou seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas e interpretá-los; (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas, de diversos contextos, que possam ser representados por equações do 2.º grau;

Objetivos específicos:

- Reconhecer e escrever em linguagem algébrica sistemas de equação do 1.º grau;
- Reconhecer, diferenciar e resolver equações do 2.º grau completa e incompleta;
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações do 2.º grau completa e incompleta;

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, folha sulfite, slides.

Encaminhamentos metodológico:

- Deixar a sala organizada em grupos de cinco e seis carteiras para que os alunos cheguem e já se separem em grupos;
- Abrir o tempo para que os alunos tirem as dúvidas em relação à lista de exercícios da aula anterior. Cada professor ficará responsável por tirar as dúvidas de um grupo por 15 minutos;
- Projetar um *slide* para explicar o que é um sistema de equação, e como resolvê-lo, com exemplos de como são feitos;
- Projetar os problemas e dar aos alunos tempo para que possam resolvê-los
- Discutir resoluções para concretizar o conhecimento;
- Explicar o que é uma equação quadrática e os diferentes métodos de resolvê-la, com ajuda de *slides*.

Revisão inicial

Primeiramente, organizamos a turma em grupos de quatro ou cinco alunos pela ordem em que chegarão, em seguida, iniciaremos a aula revisando dúvidas remanescentes da lista de exercícios encaminhada na aula anterior por 15 minutos.

Sistemas de equações

Nesse momento, é apresentado nos *slides* métodos referentes à solução de sistemas de equações os quais estão listados abaixo:

Método da soma

O método da soma consiste em somar uma "linha" com a outra em um sistema de equação. Utilizamos esse método para eliminar uma das variáveis, assim transformando ela em uma equação de uma incógnita. E depois de descobrir uma das variáveis, substituindo o valor real, você descobre a outra.

Figura 4 - Solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 10 \end{cases} \Longrightarrow x + y + 2x - y = 2 + 10$$

$$3x = 12 \Longrightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

$$4 + y = 2 \Longrightarrow y = 2 - 4 \Longrightarrow y = -2$$

Fonte: Elaborado pelos autores

Método da substituição

A motivação para o método da substituição é o fato de que equações com apenas uma incógnita são mais visuais do que equações de várias incógnitas, dessa forma, podemos isolar uma delas, deixar uma relação entre as duas incógnitas, assim, substituindo, teremos uma equação de apenas uma incógnita.

Exemplo:

Figura 5 - Solução do sistema

$$\begin{cases} 3y - x = 4 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$$

Fonte: Elaborado pelos autores

Nesse caso, podemos encontrar uma expressão envolvendo o x em relação ao y na primeira equação, $x = 3y - 4$, assim, substituindo na segunda equação temos $4(3y - 4) - 2y = 14$. Aplicando a distributiva, $12y - 16 - 2y = 14$. Juntando termos similares em lados diferentes da equação $10y = 30$.

Logo $y = 3$. Podemos usar a primeira expressão que encontramos para descobrir o x, $x = 3(3) - 4 = 5$, e assim a expressão está resolvida. Deixar como exercício mental para os alunos o que acontece quando você substitui na mesma equação, o porquê que não funciona.

Após a explicação dos métodos, apresentamos, ainda por projetor, os seguintes problemas:

1. Um estudante dispõe de até duas horas para executar determinadas tarefas de Matemática e Biologia. Sabe-se que para completar a tarefa de Matemática precisará de um tempo superior ou igual ao dobro do tempo necessário para completar a tarefa de Biologia.

Nessas condições, qual é o tempo máximo disponível para completar a tarefa de Biologia?

<u>*Resolução*</u>: 2 horas:120 minutos

M: tempo gasto na tarefa de matemática

B: tempo gasto na tarefa de biologia

$M = 2B, M + B = 120$

Substituindo a primeira igualdade na segunda, temos

$2B + B = 120$

$B = \frac{120}{3} = 40$

O tempo máximo disponível para completar a tarefa de biologia é de 40 minutos.

2. Um cavalo e um burro caminhavam juntos, carregando cada um pesados sacos. Como o cavalo reclamava muito de sua pesada carga. Sem muita paciência respondeu-lhe o burro:

\- De que te queixas? Se tu me desse um saco seu, minha carga seria o dobro da sua, mas, se eu te der um de meus sacos sua carga será igual a minha.

Quantos sacos cada um levava?

<u>Resolução</u>: O burro levava 3 e o cavalo leva 2.

Carga do Cavalo: x

Carga do Burro: y

$y + 1 = 2(x - 1)$

$x + 1 = y - 1$

$2x - y = 3$

$x - y = -2$

$x = 5, y = 7$

Onde será deixado 10 minutos para cada problema. Após o tempo, será feita uma discussão em sala sobre como foram feitas as soluções, buscando trazer um aluno no quadro para resolver para a turma. Após o intervalo, o conteúdo de equações de segundo grau é passado.

Equação de segundo grau geral:

Uma equação do segundo grau é qualquer equação em que a incógnita está elevada ao quadrado. A formade toda equação do segundo grau é:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são constantes e reais e a é diferente de 0.

Quando falamos em resolver uma equação dessa, queremos encontrar as chamadas raízes, valores onde a equação é 0.

Com relação à essas raízes, podem acontecer 3 casos:

- Existirem duas raízes reais e diferentes uma da outra;
- Existir apenas uma raiz real;
- Não existirem raízes reais.

Mas, sobre como encontrá-las, existem vários métodos:

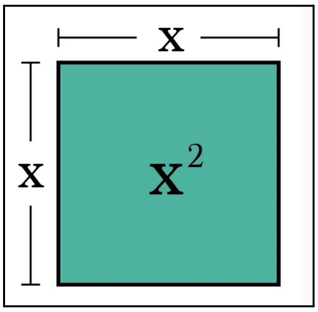
Métodos de solução:

- **Completar o quadrado**

Queremos resolver a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$, mas como fazer? O método de completar quadrado é o método mais antigo existente para solucionar equações do segundo grau. De fato, a principal aplicação de equações do segundo grau é no cálculo de áreas.

A área mais fácil de calcular é a de um quadrado. Por exemplo, um quadrado de lado x terá área igual à x^2 ou seja, algo como a figura 6.

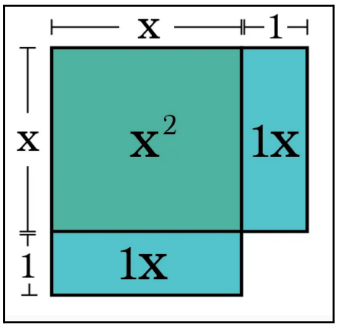
Figura 6 - Etapa 1 completar quadrado



Fonte: Elaborado pelos autores.

Como na equação original temos $x^2 + 2x - 3 = 0$, queremos adicionar o $2x$ de área na figura. Lembremos: para calcular a área de um retângulo, fazemos base vezes altura. Então para um retângulo ter área $2x$, são necessários dois retângulos com 1 de base e x de altura:

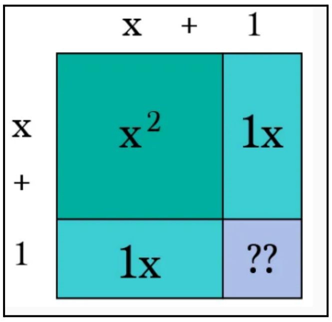
Figura 7 - Etapa 2



Fonte: Elaborado pelos autores

Mas agora, está faltando uma parte:

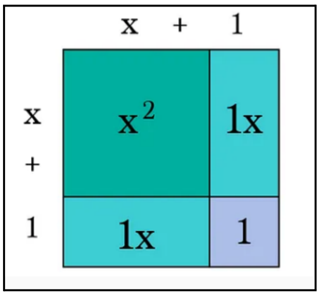
Figura 8 - Etapa 3



Fonte: Elaborado pelos autores

Essa parte é um outro quadrado, de base 1 e altura 1. Portanto, ele tem área 1:

Figura 9 - Etapa 4



Fonte: Elaborado pelos autores

Assim, temos um quadrado de lado $(x + 1)$, logo, ele tem área $(x + 1)^2$. Mas como adicionamos um "1" no quadrado, precisamos remover do termo constante. Portanto, nossa equação, ajeitada, se torna

$$(x + 1)^2 - 3 - 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$

Resolvendo agora, podemos seguir os passos:

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$(x + 1)^2 = 4$$

$$\sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{4}$$

$$(x + 1) = \pm 2$$

De $(x + 1) = \pm 2$

Com 2 positivo:

$$(x + 1) = + 2$$

$$x + 1 - 1 = 2 - 1$$

$$x = 1$$

Com 2 negativo

$$(x + 1) =- 2$$

$$x + 1 - 1 =- 2 - 1$$

$$x =- 3$$

- **Soma e Produto**

Novamente, queremos resolver a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$. Mas agora, vamos usar um outro resultado importante: A soma e o produto.

O que esse método diz é que a soma das duas raízes resulta no termo "$-\frac{b}{a}$", ou seja, $\frac{b}{a}$ invertido de sinal e o produto das duas raízes vão dar o termo $\frac{c}{a}$. Então, para encontrar as raízes de uma equação, precisamos apenas encontrar dois números que, multiplicados dão o termo $\frac{c}{a}$ e, quando somados resultam em $-\frac{b}{a}$.

Fazendo uma pequena tabela para a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ temos que dois números que, multiplicados, resultam no termo $\frac{c}{a} = \frac{-3}{1} =- 3$, ou seja, $- 3$ são

1 e $- 3$ ou 3 e $- 1$

Agora, qual desses pares, quando somados, resultam em $-\frac{b}{a}$, ou seja, $- 2$? Fazendo temos $1 + (- 3) = - 2$. Portanto, as raízes são 1 e $- 3$, justamente o que encontramos pelo método anterior.

- **Fórmula geral de resolução da equação quadrática**

Nela, precisamos novamente definir uma equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Com isso, definimos a fórmula de resolução da quadrática como

$$x1,\ x2 = - b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

É importante notar que

- São duas soluções pois existe o ± (mais ou menos), assim um das soluções será realizando a conta utilizando um +, e a outra será utilizando o −,
- O termo $b^2 - 4ac$ é conhecido como Δ (delta), ou discriminante. E o sinal dele determina como serão as soluções da equação.
  - $\Delta > 0$: Vão existir duas soluções reais e distintas (uma pro mais e outra pro menos);
  - $\Delta = 0$: Vai existir apenas uma solução real (pois $\pm 0 = +0 = -0$)
  - $\Delta < 0$: Não vão existir soluções reais;

Os seguintes exercícios serão passados, em ordem, até o final da aula. Busca-se sempre, após a solução de um, realizar a discussão conjunta do que foi feito.

1- Resolva

a) $3x^2 - 15x - 198 = 0$
b) $x^2 - 10x + 56 = 31$
c) $60 - 5x - x^2 = 15$
d) $x^2 - 8x + 15 = 7x$

2 - Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu que cada passageiro pague a quantia de R$800 mais R$10,00 por cada lugar vago.

a) De que forma é possível saber qual será o valor a ser pago por um grupo de x pessoas?
b) Qual será o valor pago por pessoa se forem 80 pessoas nessa excursão? e para 90 e 100 pessoas? O que você pode concluir destes resultados?

Resposta: $valor$: $800\,x + 10x(100 - x)$

a) $valor$: $1800x - 10x^2$
b) Para 80 pessoas obtemos R$80.000,00. Para 90 pessoas, R$81.000,00 e para 100 pessoas, novamente R$80.000,00. Podemos observar que os valores sobem até certo ponto e, então, começam a decair novamente. De fato, eles tem ponto máximo quando x=90.

Referências Bibliográficas:

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Exercícios sobre equação do 2º grau**. 2021. Disponível em: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-equacao-2-grau.htm. Acesso em: 4 out. 2023.

1.4.2. Relatório

Na manhã do dia sete de outubro, iniciamos a aula com 17 alunos dos quais foram dispostos em grupos de cinco pessoas. Enquanto os alunos entravam na sala, os professores os separavam entre os grupos com o propósito de misturá-los, pois observamos que estavam sempre nos mesmos grupos, causando dependência de alguns alunos com as respostas dos outros.

Após separados em grupos, começamos as revisões dos exercícios deixados para casa. Vimos que, ao mandar mensagem no grupo do *WhatsApp* no meio da semana pedindo se conseguiram realizar as questões ou se eles tiveram alguma dúvida na resolução, isso os incentivou a realizarem as tarefas. Na aula passada pecamos em ultrapassar o tempo determinado para essa retomada de conteúdo pois os alunos não haviam realizado muitos dos exercícios propostos. No dia de hoje, os alunos já haviam feito praticamente todas as questões, deixando apenas a mais difícil e, com isso, pudemos revisar as questões em 15 minutos, mantendo o planejamento como previsto.

Às 08h15 o professor Eduardo começou as explicações do que é um sistema de equações. Explicamos o que é um sistema de equações e dois métodos de soluções possíveis: As operações com linhas e escalonamento, os quais denominados "soma de equações" e o método da substituição.

Quanto ao método do escalonamento, apenas apresentamos exemplos de resoluções específicas, mas não atemos a uma explicação aprofundada do método. Após a apresentação dos métodos e feito um exemplo guiado, apresentamos duas situações problemas para praticarem o uso de sistemas.

Dado que eram problemas do Enem, notamos que a maior dificuldade dos alunos esteve na interpretação textual - compreender a relação das incógnitas em situações problemas e montar o sistema de equações - enquanto a solução foi realizada com relativa tranquilidade, os alunos usualmente preferindo o método da substituição pois, segundo eles, é mais direto. Conseguimos realizar todas as atividades propostas para esse momento.

Após o intervalo, presenteamos uma aluna com um doce pois ela conseguiu resolver um problema desafio (o problema dos Três Marinheiros, de Malba Tahan) que havíamos passado há duas aulas, e prometido uma recompensa para quem buscasse encontrar uma solução.

Em seguida, o professor Shimmer continuou a aula apresentando o conteúdo de equações do segundo grau. Nesse momento, buscamos apresentar três métodos de solução: completando o quadrado, soma e produto e pela fórmula de Bhaskara.

Percebemos que houve um desconforto dos alunos com o método de completar o quadrado, e que não é um método usualmente apresentado em salas de aula. Nesse momento, também, por uma questão de uma aluna, os professores desviaram levemente do planejado para buscar sanar a dúvida sobre como isso pode ser generalizado para equações cúbicas. O maior problema que eles tiveram com o completamento de quadrados foi a dificuldade de ver uma equação como um objeto geométrico, não conseguindo associar um termo “x^2” com um quadrado de lado x com facilidade.

Em seguida, foi passado o método da soma e do produto, onde houve, também, mais um momento de desvio parcial do planejado, pois uma aluna perguntou "Mas por que vão existir duas raízes?", a qual os professores buscaram uma resposta satisfatória para ela, mas que em seu núcleo decorre do Teorema Fundamental da Álgebra. Ainda sobre o método da soma e do produto, percebemos que houve um desafio didático ao explicar a motivação do uso deste método e quando o mesmo é indicado, pois no método de resolução utilizando Bháskara que as raízes (ou a raiz, ou sua falta) são o resultado final. No método da soma e do produto, supomos sua existência e trabalhamos com seus valores sem tê-los encontrado ainda, formando duas novas incógnitas para os alunos trabalharem, além da noção de "fazer suposições sobre as raízes" sem ainda saber *quais números* elas são.

Em seguida, trabalhamos com a fórmula de Bhaskara. Percebeu-se uma maior familiaridade dos alunos com tal método, mas uma diferença onde diferentes grupos de alunos se lembraram: alguns calculam o discriminante separadamente, enquanto outros o calculam diretamente dentro da fórmula maior. Finalmente, os professores apresentaram exercícios de solução de equação do segundo grau para que os alunos resolvessem em grupo.

Notou-se que a fórmula de Bhaskara foi a maneira predileta dos alunos para a solução, mas que houve dificuldades na identificação dos coeficientes quando não estão organizados da maneira habitual. Houve também dificuldade de alunos em perceber que o sinal do coeficiente importa também e deve ser passado para a fórmula.

Esses exercícios seguiram até o final da aula. Não foi possível passar o último problema planejado para a aula, mas ele será aplicado no próximo encontro, por poder ser reformulado como um problema de funções. Ademais, a aula fluiu tranquilamente e foi mais organizada, principalmente na organização do tempo, que as anteriores.

1.4.3. Materiais utilizados

- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. O big town coliseum tem 20.000 lugares - 8.000 numerados e 12.000 não gerais. Os lugares numerados custam 10 reais cada e os outros 5 reais cada um. A mais nova sensação, o grupo BTS, está fazendo um show lá. O promotor estima seus gastos com porteiros, serviços de segurança e anúncios em 10.000 reais. Se o BTS exige 40% do preço de cada ingresso vendido, mais 40.000, quantos ingressos precisam ser vendidos para não haver lucro nem prejuízo? E para que o lucro seja de 50.000?

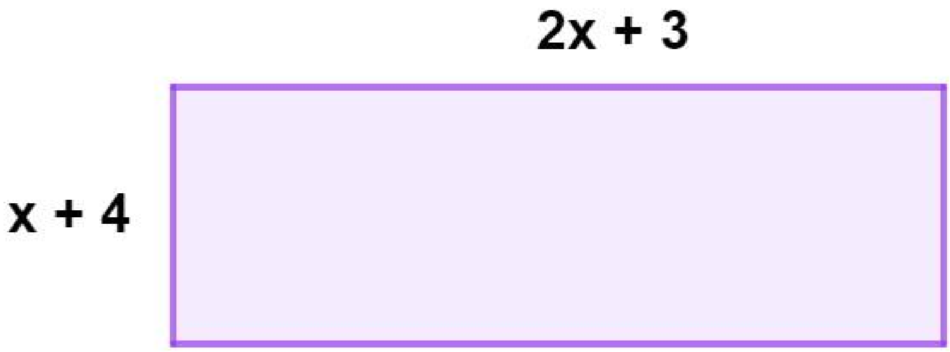
2. (Enem Digital 2020) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.
   Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

3. Resolva $(x + 5)(x - 7) = 0$

4. Resolva a equação $-3x^2 + 18x - 15 = 0$.

5. Escreva a forma correta da solução do produto notável $(x - 5)^2$

6. A área do retângulo a seguir é igual a 117 m²:



Qual o valor de x?

7. (Puc–Rio - Adaptada) As duas soluções de uma equação do 2° grau são – 1 e $\frac{1}{3}$. Qual é a equação?

1.5. ENCONTRO 5 – 14/10/2023

1.5.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Funções do 1º grau

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Objetivos específicos:

- Identificar relação de dependência, domínio, contradomínio e lei de formação de uma função;
- Construir a forma geral de função afim;

- Compreender o conceito de função injetora, sobrejetora, utilizando diagramas e conseguir realizar a construção do gráfico de uma função afim;
- Aplicar a função afim na vida real, sabendo modelar uma situação com uma função afim.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, folha sulfite, *slides*, trilho de 120 cm, unidade de fluxo de ar, carrinho para trilho, cronômetro digital, sensor fotoelétrico, cabos de conexão.

Encaminhamentos metodológico:

- Os alunos serão levados ao laboratório de física para a utilização do colchão linear de ar.
- As dúvidas sobre a tarefa da aula anterior serão discutidas com os docentes;
- Eles serão separados em “grupos de pesquisa”, onde será explicado o roteiro de pesquisa, que eles estarão a procura de “algo” que determine o deslocamento do carrinho com as informações que eles têm;
- Os docentes devem ajudar com palpites de como chegar na função, direcionamentos nas mesas e com ajuda na hora de fazer o experimento;
- Depois disso, os resultados serão discutidos com a turma, o que encontraram e aprenderam com isso;
- No final, esse conceito será formalizado com ajuda de *slides* e concretizado com exercícios.

Para mudar a rotina do PROMAT, iremos levar os alunos até o laboratório de física, teremos um propósito experimental após a introdução. Como de costume, iremos iniciar a aula revisando os exercícios que aplicamos na semana passada (15 minutos).

Após o tempo previsto para revisão, iremos iniciar o conteúdo de funções de primeiro grau. Em *slides* vamos explicitar que uma função é uma relação entre dois conjuntos que segue uma regra, e quais suas propriedades. O conjunto do domínio e do contradomínio, sua lei de formação, também falaremos de função injetora, sobrejetora e bijetora, e para auxiliar utilizaremos o diagrama de flechas.

O objetivo é introduzir o conceito de função na prática, utilizando aparatos do laboratório de física. Assim, separamos os alunos em grupos e passaremos o roteiro do experimento por impresso para cada um deles. Após, explicaremos a atividade, que decorrerá da seguinte maneira:

- Meça e anote os valores de distância entre os cinco sensores;
- Posicione carrinho sobre o trilho, cerca de 10 a 15 cm antes do sensor de disparo;
- Zere o cronômetro (temporizador);
- Após ligar o fluxo de ar do trilho, impulsione o carrinho com a mão ou disparador magnético, garantindo apenas que, antes de passar pelo sensor de disparo, não atuem mais forças cobre o carrinho;
- Anote os tempos registrados pelo cronômetro digital. Lembre-se de somar as distâncias e os tempos ao anotá-los na tabela 1;
- Repita o procedimento mais duas vezes.

Como existe apenas um 1 trilho de ar no laboratório, enquanto um grupo realiza as medições (esperado que demore por volta de 5 minutos), os professores revisarão e aprofundarão o conceito de funções, na busca de direcionar a análise que os alunos realizarão posteriormente.

Após todas as medições serem realizadas, será indicado para os alunos montarem uma tabela com os dados obtidos, seguindo o molde a seguir

Quadro 5- Molde para experimento de física

N	Deslocamento (cm)	t1 (s)	t2 (s)	t3 (s)	t4 (s)
1	0	0	0	0	0
2					
3					
4					
5					

Fonte: Elaborado pelos autores

Após montarem a tabela com os dados, será pedido aos alunos analisarem o resultado e buscarem inferir informações sobre os dados.

O professor deve incentivá-los a buscarem uma "lei geral", que, dado o tempo, seja possível saber quanto o móvel se deslocou e a fazerem o gráfico dessa lei geral em um plano cartesiano. Será incentivado a entenderem as características da lei geral formada, sua variação e os conceitos de domínio e imagem a partir de perguntas como "quais valores possíveis podemos inserir na função?” e “quais valores ela pode nos retornar?".

Após o término, será explicado o conteúdo de funções de uma maneira mais formal, com ajuda dos *slides*, para concretizar as ideias exploradas no experimento que podem ser acessados pelo link: https://www.canva.com/design/DAFxKh_zgoI/fOSs7Dmn90-_BuVFrhvqQQ/edit?utm_content=DAFxKh_zgoI&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton

Tais definições seguem a seguinte ordem

- **Domínio**: Conjunto de elementos que servem de "entrada" na função.
- **Contradomínio**: Conjunto de elementos em que se situam todas as "saídas" da função.
- **Função**: Uma relação que leva cada elemento do domínio a um *único* elemento do contradomínio. Esse elemento do contradomínio de chegada é dito fazer parte da **imagem** da função.
    - A relação pode se dar de forma algébrica, gráfica, tabelada ou por um diagrama de flechas.
    - Ressaltamos maneiras de verificar se a relação dada é uma função:
        - Se for dada por um gráfico: Toda reta vertical, paralela ao eixo y, deve cortar o gráfico em *apenas um* ponto.
        - Se for dada por um diagrama de flechas: De todo elemento no domínio, deve sair *apenas uma* flecha.
- **Função injetora:** Para todo a, b pertencendo ao domínio de uma função f onde a é diferente de b, temos que f(a) é diferente de f(b). Ou seja, a função injetora é se, dados dois elementos do domínio, sua imagem sempre será diferente do outro.
- **Função sobrejetora:** Dado y=f(x), temos para todo x pertencente ao domínio e existe y pertencente ao contradomínio que satisfaz a relação. Ou seja, a função sobrejetora é dada se todos os elementos do contradomínio são imagem de algum elemento do domínio.
- **Função afim**: Uma função é classificada como "função afim" se ela puder ser escrita de uma forma equivalente à $f(x) = ax + b$, dados *a* e *b*

constantes, com a diferente de 0, ou de outra forma, uma função onde o gráfico é uma reta angulada.

- Como calcular o coeficiente de uma função afim: Com a ajuda do gráfico apresentado nos *slides*, mostrar que o coeficiente *a* é a taxa de variação da reta formada pelo gráfico da função. Ou seja, temos que $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, onde x_1, x_0 são dois pontos do domínio e y_1, y_0 são suas respectivas imagens.

Questão de fixação proposta

Uma estudante quer vender brigadeiros para arrecadar fundos para uma viagem de formatura da escola. Para produzir os brigadeiros, a estudante possui um custo fixo de R$50,00, que usa para contribuir para sua mãe com os custos com água, luz, internet, gás, entre outros, e custos variáveis com matéria-prima e demais despesas associadas à produção. O valor dos custos variáveis é de R$0,80 por cada brigadeiro produzido.

a) Determine a expressão da função que relaciona a quantidade de brigadeiros produzidos ao custo de produção. Faça o gráfico.

b) O que os valores R$50,00 e R$0,80 representam nesta função obtida?

c) Sabendo que a estudante cobra R$3,00 por brigadeiro, escreva a lei de formação da função que representa o lucro das vendas dela.

d) Qual é o domínio da função do lucro? E o contradomínio? Qual a imagem? É uma função injetora? É sobrejetora?

Resolução:

a) Custo(brigadeiro) = C(b) = 50 + 0.8b
b) Coeficiente linear e angular respectivamente
c) L(b) = 3b - C(b) = 2.2b - 50
d) Domínio = Naturais, pois não se aplicaria nenhum outro conjunto, pois se trata de um objeto real. O contradomínio pode ser escolhido, mas deve ser um conjunto que contém ao mínimo os os racionais, pois todos os possíveis números que podem ser alcançados com a função são racionais. A imagem é todos os números racionais que podem ser alcançados somando 2.2 à -50. É injetora, todos os pontos no domínio

estão relacionados exatamente à uma imagem. Não é sobrejetora dado o contradomínio e o domínio.

1.5.2. Relatório

Na manhã do dia 14 de outubro começamos a aula com 16 alunos, no entanto, tal aula não ocorreu na sala tradicional, mas sim no laboratório de física da Unioeste durante a aula inteira. Ao preparar a aula, percebemos que o conteúdo de função afim poderia muito bem ser explicado de maneira intuitiva a partir de um experimento físico. Tal experimento seria a medição de velocidade em um movimento retilíneo uniforme a partir do uso de um móvel em um trilho de ar.

Utilizamos tal experimento por sua simplicidade de ser realizado e ser um uso real (por mais que idealizado) de funções afim. Com isso, foram formados grupos de 4 pessoas, cada um em sua bancada junto do papel de instrução.

Observamos que a aula fora do ambiente “normal” gera um engajamento melhor nos alunos, sentimos que eles estavam mais animados e interessados só por ter algo físico para mexerem, o que incentivou a curiosidade deles.

Iniciamos com o experimento, de modo que cada equipe ia até a bancada do aparelho e realizava as medições com três velocidades diferentes. Durante essa etapa de coleta de dados, percebemos o interesse do grupo que estava utilizando o aparelho em seu funcionamento e o sentimento de "pesquisa" presente neles. Enquanto um grupo utilizava o aparelho (auxiliados pelo estagiário Shimmer e o professor Renato), os outros estagiários se encontravam com os outros grupos explicando o conceito geral e notas históricas do desenvolvimento de funções, além de tirar dúvidas que surgiram sobre como a aula decorreria. Notamos nesse momento uma defasagem no conhecimento dos alunos sobre o conteúdo de função, muitos tendo apenas uma ideia de "caixinha que entra número e sai outro", e a falta de correlação entre as diferentes representações gráficas.

Doravante, em posse dos resultados obtidos experimentalmente, foi pedido que os alunos montassem uma tabela. No entanto, eles apresentaram dificuldades sobre o que o cronômetro digital do laboratório estava medindo. Isso se deu pois o cronômetro marcava o tempo *entre* os intervalos e não o tempo acumulado do início até a marcação atual, dessa forma, para o experimento, eles deveriam somar os valores para conseguir o tempo total até a marcação.

Após melhor explicado seu funcionamento, os alunos começaram a colocar os dados que haviam coletados em um gráfico, notando que quando o carrinho estava mais rápido, a reta formada era mais íngreme, onde começamos a introduzir a ideia de coeficiente angular com a pergunta "Por que a reta estava mais íngreme?" foi uma pergunta feita para os grupos, buscando que eles compreendessem tal relação de taxa de variação, primeiro associada ao deslocamento do carrinho mas que esperamos que eles conseguissem expandir tal ideia para um caso geral de função afim.

Após concluído o experimento, os alunos conversaram com os professores sobre o que eles haviam entendido sobre o experimento, notando que a medição poderia começar no 0 (se esperássemos que o carrinho saiu do ponto 0), ou do ponto 20, que é onde a primeira medição de tempo começa, e mostramos a eles que ambos estavam corretos, colocando seus exemplos de pontos em um *software* gráfico chamado Desmos, e notando como a única diferença é que no caso de assumir 1, a reta começa no (0,0), e no caso 20, ela começa no (0,20), mas as retas tinham exatamente o mesmo ângulo. Com essa explicação, abrimos os *slides* para começar a explicação formal.

Notamos que a intuição física adquirida pelo experimento ajudou a fixar conteúdos que já conheciam sobre função, e os levou a perguntar durante a explicação seguinte nos *slides* como que o conteúdo se relaciona com o experimento.

Em seguida, explicamos a definição de função, domínio, imagem, e contradomínio, utilizando o exemplo do carrinho. Como não existe tempo negativo, ressaltamos que o domínio seria apenas os reais positivos e que o contradomínio é apenas até o final da reta, que é um metro.

Os alunos entenderam esses conceitos com uma certa facilidade e rapidez, e conseguiram expressar bem eles nos exemplos que foram dados. Depois disso, definimos função afim, e seus usos, como a função que eles encontraram era uma função afim. Ao apresentar, sentimos a falta de mais exemplos de algo do cotidiano deles, que pudesse promover aprendizagem significativa, pois o conceito injetividade e sobrejetividade, embora para alguns tenha ficado claro, para outros percebemos que houve dificuldade de compreensão. Não tivemos tempo de passar exercícios de aplicação sobre função, deveríamos ter definido com mais assertividade o tempo de exercícios para averiguar a compreensão, tirando possíveis dúvidas ao aplicar o conteúdo visto. Por fim demos a eles uma lista de exercícios para a próxima aula.

1.5.3. Materiais utilizados

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. (Enem Digital 2020, adaptada) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$1.200,00 por hectárea plantado, e vendia por R$50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro, L, que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas. (Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado))

   Qual é a expressão que determina o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

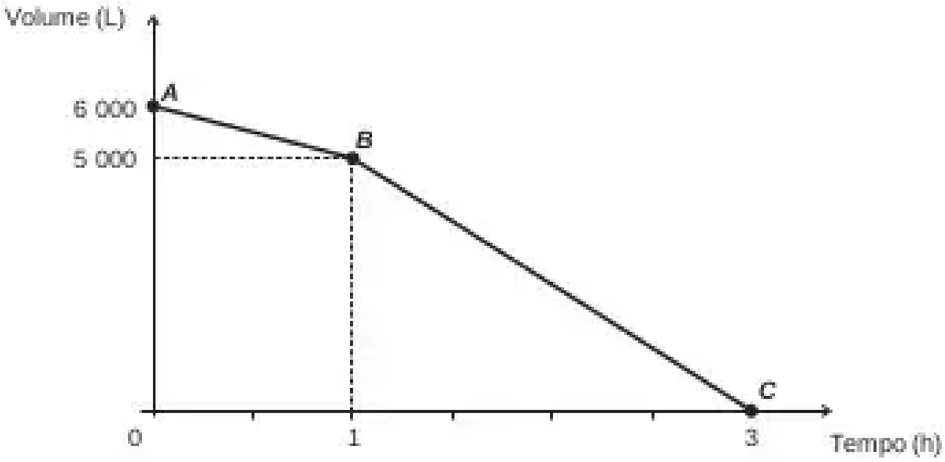
2. (Enem PPL 2020, adaptada) O valor cobrado por uma corrida de táxi é calculado somando-se a bandeirada, um valor fixo que é cobrado em qualquer corrida, a um valor variável que depende da distância percorrida.

   Uma empresa de táxi cobra pela bandeirada o valor de R$4,50. Para corridas de até 200 metros, é cobrada somente a bandeirada, e para corridas superiores a 200 metros é cobrado o valor de R$0,02 para cada metro adicional percorrido.

   Para analisar o valor cobrado, em reais, em função da distância percorrida, em metro, a empresa elaborou um gráfico, com uma simulação para uma distância de 600 metros. Como poderia ser esse gráfico?

3. (Enem 2016, adaptada) Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas

duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo. Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?



4. (Unicamp - 2016, adaptada) Considere a função afim f(x) = ax + b definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que f(4) = 2, assim, qual o valor de f(f(3) + f(5))?

5. (Unifesp, adaptada) Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade: “a valores distintos de *x* correspondem a valores distintos de *y*”. Tais funções são chamadas injetoras. Desenhe um gráfico e dê uma lei de formação de funções injetoras.

ROTEIRO DO EXPERIMENTO

- Meça e anote os valores de distância entre os cinco sensores (3x);
- Posicione carrinho sobre o trilho, cerca de 10 a 15 cm antes do sensor de disparo;
- Zere o cronômetro (temporizador);
- Após ligar o fluxo de ar do trilho, impulsione o carrinho com a mão ou disparador magnético, garantindo apenas que, antes de passar pelo sensor de disparo, não atuem mais forças cobre o carrinho;
- Anote os tempos registrados pelo cronômetro digital. Lembre-se de somar as distâncias e os tempos ao anotá-los na tabela 1;

- Repita o procedimento mais duas vezes.

Preencha a tabela com os valores obtidos

N	Deslocamento (cm)	t1 (s)	t2 (s)	t3 (s)	t4 (s)
1					
2					
3					
4					
5					

Com os valores obtidos crie um gráfico de tempo por deslocamento e veja quais suas características, comente em grupo qual é a semelhança.

1.6. ENCONTRO 6 – 21/10/2023

1.6.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Funções do 2º grau

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Objetivos específicos:

- Identificar relação de dependência na função;
- Identificar domínio, contradomínio e lei de formação de uma função quadrática;
- Identificar a construção das diferentes formas de funções quadráticas;
- Explicar como construir o gráfico da função quadrática;

- Mostrar aplicações de função na vida real
- Explicar como modelar uma situação com uma função quadrática.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, pincel marcador, *slides*, computador;

Encaminhamentos metodológico:

- Os alunos serão levados no laboratório de informática;
- Os docentes vão ajudar os alunos com as dúvidas da tarefa da última aula, revisando os conteúdos;
- Os alunos serão instruídos a abrir o Desmos e o site será explicado;
- Serão passados exemplos de funções quadráticas e com a mecânica de “slider” do Desmos os alunos poderão experimentar e discutir entre si o que cada coeficiente faz;
- O conteúdo será formalizado com ajuda de *slides*;
- Será aplicado com uma lista de problemas, que será feita pelos alunos, e depois discutida em frente da turma
- Ao final, os alunos irão abrir o Super Mario Quadratics, e serão livres para completar as “fases”. No final, será discutido com a turma como resolver cada um dos “níveis” para demonstrar as funções quadráticas em várias formas.

Revisão da aula anterior (15min)

Começaremos a aula revisando a aula anterior ajudando os alunos com dúvidas remanescentes em suas tarefas.

Atividade inicial (20min)

Primeiramente, pediremos para que os alunos abram o site https://www.desmos.com/calculator. Explicaremos as funcionalidades básica do site:

- Utilizado, no geral, para fazer gráficos de funções. Isso é feito escrevendo a lei de formação em um dos inputs da barra lateral;
- Ao clicar na tela em cima de um ponto do gráfico, serão mostradas suas coordenadas;
- Para fixar um ponto na tabela, basta, na barra lateral, utilizar notação de ponto (por exemplo (2,3)) para marcar na malha.

Iremos utilizar o Desmos para escreverem algumas equações do segundo grau. Deixaremos livre qual a função, mas será passado no quadro algumas possibilidades:

- $f(x) = x^2 + 2x - 3$
- $g(x) = 5x^2 + 2x + 2$
- $h(x) = 2x^2 - 3x - 5$
- $w(x) = 5x^2$

Pediremos para que anotem e conversem com os colegas sobre as diferenças entre cada um dos gráficos apresentados e que discutam sobre o que pode causar essas diferenças, eles serão também incentivados a alterar os coeficientes de uma função gradualmente e a observarem as mudanças. Tudo isso será feito com incentivo dos professores e em voz alta, para que eles expressem o que estão entendendo do assunto

Formalização do conceito (40 min)

Em seguida, utilizaremos *slides* para fundamentação teórica. A partir destes formalizamos os conteúdos de gráfico de função quadrática, seu ponto de máximo/mínimo, concavidade e raiz.

Suas especificidades estarão em cada um do *slides* apresentados em https://www.canva.com/design/DAFxeKOSvTY/ELOfJcLmWTpIUcs7SwVLDw/edit

Mas os conteúdos apresentados serão:

- **Função do 2º grau:** A função cuja lei de formação pode ser escrita por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde x é a variável e a, b e c são os coeficientes, com $a \neq 0$.
- **Gráfico de uma função do segundo grau:** É sempre uma parábola que pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.
- **Papel dos coeficientes:** a aumenta ou diminui a abertura da parábola. Quando $a > 0$, a concavidade da parábola será para cima e, quando $a < 0$, para baixo. O coeficiente b faz com que a parábola se mova para os lados ou na vertical. Já o c indica onde o gráfico irá interceptar o eixo y.

- **Raízes:** Os valores de x em que $f(x) = 0$. As raízes indicam onde o gráfico da função do segundo grau intercepta o eixo x.
- **Papel do discriminante na representação gráfica:** Uma forma de encontrar as raízes da função é por meio da fórmula de Bhaskara, dada por $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Chamamos de discriminante o valor de Δ e, a partir deste valor, é possível verificar quantas raízes a função terá. Quando $\Delta > 0$, a função terá duas raízes, quando $\Delta = 0$ será apenas uma raíz e quando $\Delta < 0$ a função não intercepta o eixo x.

Resolução de problemas (1 hora)

Em seguida, passaremos ainda nos *slides* os seguintes problemas:

1. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu que cada passageiro pague a quantia de R$800 mais R$10,00 por lugar vago.
    a) De que forma é possível saber qual será o valor a ser pago por um grupo de x pessoas?
    b) Qual será o valor pago por pessoa se forem 80 pessoas nessa excursão? e para 90 e 100 pessoas? O que você pode concluir destes resultados?
    c) Para que número de passageiros a receita da empresa será máxima?

<u>*Resolução*</u>: $valor\text{: } 800\,x + 10x(100 - x)$

a) $valor\text{: } 1800x - 10x^2$

b) Para 80 pessoas obtemos R$80.000,00. Para 90 pessoas, R$81.000,00 e para 100 pessoas, novamente R$80.000,00. Podemos observar que os valores sobem até certo ponto e, então, começam a decair novamente.

c) De fato, a companhia aérea tem ponto máximo quando x=90.

2. Uma parábola que representa graficamente a função $y =- 2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1,0) e seu vértice é o ponto (3, k). Qual o valor de k?

Atividade final (1 hora)

Para a última parte da aula, os alunos acessarão o site Super Mario Quadratics • Activity Builder by Desmos para a atividade.

Nessa atividade os alunos utilizarão o conhecimento que obtiveram para construir diferentes gráficos de parábolas, tal que consigam atingir os diferentes objetivos em cada nível apresentado. Nós estaremos andando pela sala dando dicas de possíveis soluções e remetendo ao conteúdo da aula sobre as diferentes formas de representar a função de segundo grau, e a função de cada coeficiente.

1.6.2. Relatório

No dia vinte e um de outubro, realizamos o sexto encontro do Promat com os alunos, como pretendíamos levá-los ao laboratório de informática um dos professores ficou na sala de aula esperando que todos chegassem para que ninguém ficasse perdido. Vieram doze alunos, e às oito e dez nos dirigimos até a sala. Já acomodados no laboratório, como de costume, o início da aula foi dedicado a tirar dúvidas da aula anterior, durante 15 minutos.

Para iniciar a aula, os alunos acessaram o Desmos e os professores explicaram como visualizar gráficos de funções por meio do aplicativo. Ao contrário do previsto, os alunos conseguiram se familiarizar com o aplicativo facilmente conseguindo fazer gráficos variados, sem que fosse necessário dar funções específicas para serem verificadas e os professores incentivaram-os a explorar as propriedades das funções do segundo grau, de acordo com os coeficientes. Para isto, o professor Shimmer instruiu como utilizar controles deslizantes, que permitem que os coeficientes da função sejam alterados gradualmente e assim observar como o gráfico se comporta.

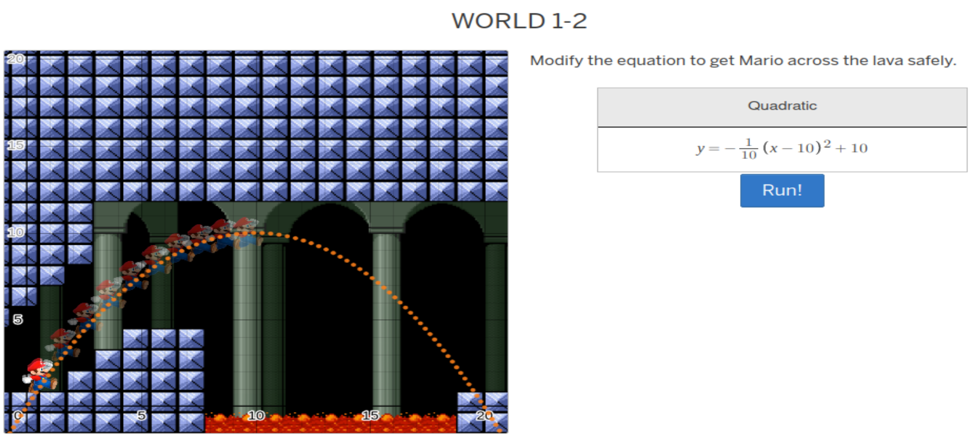
Percebemos que esta atividade foi produtiva para este objetivo, pois os alunos puderam explicar aos professores sem dificuldades, por exemplo, que, dada uma função do segundo grau $(ax^2 + bx + c)$, o coeficiente a determina a concavidade da parábola (se para cima ou para baixo), bem como qual será a sua “abertura”. Também foram capazes de identificar que o coeficiente c determina onde o gráfico cortará o eixo y. Os professores poderiam ter preparado de antemão alguma atividade que pudesse deixar mais claro o papel do coeficiente b, pois a maioria dos alunos não foram capazes de compreender como ele altera o gráfico.

Em seguida demos início à apresentação do conteúdo com o auxílio dos *slides*, formalizando o papel de cada um dos coeficientes, bem como o conceito de ponto máximo/mínimo e raízes da função no gráfico. Percebemos neste momento, que alguns dos conteúdos que estavam presentes nos *slides* já haviam sido esclarecidos durante a atividade do Desmos, o que deixou a aula repetitiva, que foi notado pelos alunos com reações de tédio com as repetições.

No próximo momento da aula, foram passados dois problemas para aplicação do conteúdo apresentado. Num primeiro momento, os professores sentiram vontade de auxiliar os alunos a resolverem logo após apresentar o problema, mas o professor Jean nos instruiu a deixar um momento para que os alunos pensassem sozinhos, o que permitiu que alguns resolvessem por si mesmos e ajudassem alguns de seus colegas. Incentivamos os alunos que conseguiram resolver mais rapidamente a verificar suas respostas utilizando o Desmos para observar o comportamento da função no gráfico.

A atividade de encerramento foi o Super Mario Quadratics, que permitiu que os alunos verificassem mais uma vez o efeito dos coeficientes da função quadrática, além de também ser possível explicar de forma visual e intuitiva como as raízes definem a função quadrática e como elas aparecem no gráfico. O objetivo do jogo é escrever a lei de formação de funções quadráticas cujos gráficos levam o Mario a alcançar algumas moedas ou ainda a desviar de obstáculos. Os alunos demonstraram interesse no jogo, foi possível sanar algumas dúvidas que foram apresentadas durante a realização do jogo, tal qual o papel que as raízes têm na função, e maior esclarecimento das definições do vértice.

Figura 10 - Super Mario Quadratics



Fonte: Super Mario Quadratics
https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5c7614041509d870d4838bfd#preview/5b05a9eb-a4db-4f8f-bff1-8bbad140ea39 Acesso em 15 de outubro de 2023.

Acreditamos que, apesar de ter sido divertida para os alunos, antes de realizar este jogo, deveríamos ter explicado melhor como uma função do segundo grau pode ser escrita como o produto de polinômios do primeiro grau, e assim eles poderiam compreender de forma mais clara como o processo de encontrar as raízes auxiliam no desenho do gráfico. Ainda assim, o laboratório de informática se mostrou um ambiente que proporciona recursos visuais e interativos que promovem a aprendizagem de forma lúdica em que os alunos ficam engajados em realizar as atividades.

1.6.3. Materiais utilizados

- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. Determine as raízes das funções:
   a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   b. $f(x) =- x^2 + 3x - 4$

2. Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:
   a. $y = x^2 - 2x$
   b. $y = x^2 - 2x + 4$
   c. $y =- 2x^2 - 4x$

3. (Enem 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) =- 2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t=0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão só é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
   A Secretaria de saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.
   Em que dia a segunda dedetização precisou acontecer?

4. (PUC-SP) A função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida quando m assume qual valor?

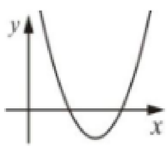
5. Uma bola de basquete é arremessada por um jogador para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $h(x) = -2x^2 + 12x$, em que h é a altura, em metros, e x o tempo, em segundos. Qual foi a altura máxima atingida por esta bola?

6. O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, em que m Є R, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Determine f(2)

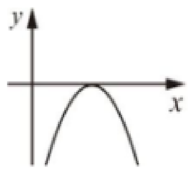
7. Determine os valores de m, para que a função $f(x) = (m - 2)x^2 - 2x + 6$ admita raízes reais.

8. Qual a parábola abaixo que poderia representar uma função quadrática com um $\Delta < 0$?

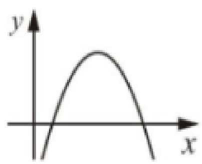
a)



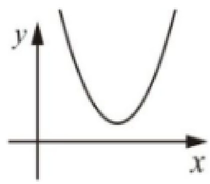
b)



c)



d)



9. A receita R de uma pequena empresa, entre os dias 1 e 30 do mês, é dada, em função do dia d do mês, pela função $R(d) = -d^2 + 31d - 30$, enquanto a despesa D é dada por $D(d) = 11d - 19$. Em que dias o lucro da empresa é zero?

10. Um jogador de basquete arremessa uma bola cujo centro segue a trajetória plana da função $y = - x^2 + x + 2$, sendo x e y dados em metros. Suponha que esse jogador acerte o arremesso, e o centro da bola, na descida, passe pelo centro da cesta que está a 3 m de altura.

a. Determine a distância, em metros, do centro da cesta ao eixo y.
b. Qual foi a altura máxima atingida pela bola?
c. Você acha difícil acertar uma cesta à distância obtida no item a? Justifique.

11. Para um indivíduo sadio em repouso, o número N de batimentos cardíacos por minuto varia em função da temperatura ambiente t (em graus Celsius), segundo a função $N(t) = 0.1t^2 - 4t + 90$. Nessas condições, em qual temperatura o número de batimentos cardíacos por minuto é mínimo?

12. Nos acidentes de trânsito, uma das preocupações dos especialistas em tráfego é descobrir qual a velocidade do veículo antes da colisão. Uma das fórmulas utilizadas é $d = 0.1v + \frac{v^2}{250}$ na qual v é a velocidade, em quilômetros por hora, desenvolvida pelo veículo antes do choque e d, a distância, em metros, que o mesmo percorre desde que o motorista pressente o acidente até o mesmo parar. Essa é uma função do 2º grau que relaciona uma distância, muitas vezes determinada pelas marcas de pneus na pista, após utilização brusca dos freios, e a velocidade que o carro trafegava.

    Quantos metros percorre um carro a 80 km/h, desde o momento em que vê o obstáculo, até o carro parar?

13. Um sitiante plantou 30 abacateiros e cada árvore produz 100 abacates em média. Pretendendo aumentar o número de árvores, o sitiante consultou um especialista que o informou que cada árvore nova plantada fará diminuir em 2 abacates o número médio produzido pelas árvores. Nestas condições, quantas árvores ele deverá plantar para obter o número máximo de abacates?

1.7. ENCONTRO 7 – 04/11/2023

1.7.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Polinômios

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral: Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações fundamentais e expressões numéricas. Identificar monômios e polinômios e efetuar suas operações/ Desenvolver produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença. Reconhecer uma expressão algébrica. Resolver e elaborar problemas, de diversos contextos, que envolvam produtos notáveis e cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Objetivos específicos:

- Compreender o que são polinômios.
- Aprender a identificar termos, coeficientes, grau e grau de um polinômio.
- Realizar operações básicas com polinômios, como adição, subtração e multiplicação.
- Compreender o processo de fatoração de polinômios e conseguir identificar um mesmo polinômio representado de diversas formas.
- Identificar e conseguir operar com produtos notáveis, especialmente soma e subtração de quadrados perfeitos e diferença de quadrados

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, folha sulfite, *slides*, algeplan.

Encaminhamentos metodológicos:

- Dispor os alunos em grupos;
- Distribuir o Algeplan para os alunos;
- Resolver o proposto;
- Apresentação de *slides*;
- Definição de polinômio;
- Operações com polinômios;
- Fatoração de polinômios;
- Produtos notáveis;
- Remeter ao algeplan;
- Resolução de problemas;
- Jogo da memória fatoração/produtos notáveis.

Revisão da aula anterior (15min)

Começaremos a aula revisando a aula anterior ajudando os alunos com dúvidas remanescentes em suas tarefas.

Atividade Inicial (60min)

Para a primeira parte da aula será utilizado o Algeplan para a apresentação do conceito de polinômios. Essa primeira parte da aula será separada em três momentos, 10 minutos para o primeiro e 25 minutos para os outros dois.

1º Momento (10 minutos):

Para o primeiro momento os alunos serão separados em grupos contendo quatro alunos. Para cada grupo será entregue um conjunto de algeplan e uma folha sulfite para cada aluno, dando um tempo para que eles analisem as peças. No quadro será escrita uma tabela básica, contendo uma coluna para que a peça seja identificada, um para as dimensões, outro para o perímetro e um último para a área.

2º Momento (25 minutos):

Depois de entregue os materiais, os alunos terão que encontrar a área, e o perímetro de cada peça do Algeplan, como a tabela sugere, encontrando expressões para cada figura, com o tamanho de algumas sendo explicado em conjunto com os alunos, mostrando a figura, falando a cor, e dando a dimensão de um dos lados, por exemplo: “o quadrado azul pequeno vamos falar que tem lado y”.

3º Momento (25 minutos):

Nesse momento após os alunos terem reconhecido as peças e escrito suas informações serão dados exemplos de expressões algébricas, em forma algébrica, pedindo para que eles transformem na representação geométrica, e de representação geométrica para algébrica.

Exemplos:

$2xy + x^2 + 3$

$x^2 + 2xy + y^2$

$2xy + y^2 + 4$

$4y + 3xy + 2y^2$

$2xy + 2$

Formalização (40min)

Com auxílio de *slides* iremos realizar a formalização do conceito de polinômios, partindo de o que é um polinômio, operações com polinômios, realizando atividades de soma, subtração e multiplicação de polinômios ao decorrer da apresentação. A forma de representar que foi aprendida com o algeplan será utilizada como referência para que os alunos tenham um conhecimento mais completo das formas de representação, e o que polinômios significam.

Com o auxílio dos *slides* que podem ser encontrados em: https://www.canva.com/design/DAFyHjxBqek/cJXO7z7adMg7JxzZwWVZnA/edit o conceito que eles foram introduzidos com o algeplan será formalizado.

Os conteúdo abordados pelos slides serão:

- Definição do que é um *polinômio* como "Qualquer expressão formada pela junção de monômios com operadores aritméticos".
    - Definição de *monômio* como "o produto de potências com expoentes inteiros não negativos de variáveis e números reais"
    - Definição de *binômios* e *trinômios* como a junção de dois e três monômios, respectivamente.
- Apresentação da soma e subtração de polinômios a partir do exercício:

Figura 11 - Exercícios utilizado

$p(x)=2x^3+x^2+5$ $\quad$ $q(x)=4x^3+x^2-7x$

$r(x)=x^2+1$ $\quad$ $s(x)= x^2+x$

a) $p(x)+q(x)$ $\quad$ c) $r(x)+s(x)$ $\quad$ e) $r(x)+p(x)$

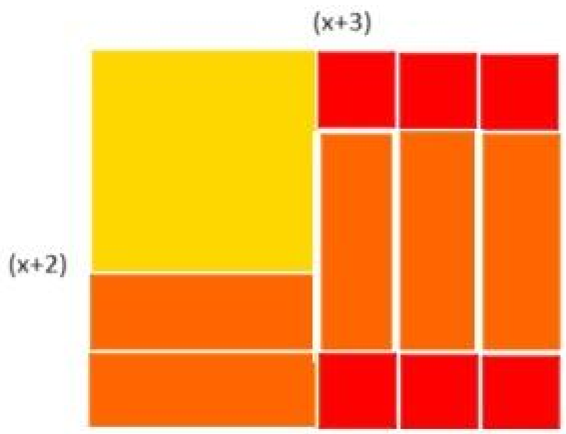
b) $p(x)-q(x)$ $\quad$ d) $r(x)-s(x)$ $\quad$ f) $q(x)-s(x)$

Fonte: Elaborado pelos autores

    - Será ligado com o Algeplan mostrando as diferentes peças, e como para somá-las, deve-se somar as peças que tem a mesma "parte literal", na representação algébrica, ou as peças que são "congruentes" na representação do algeplan

- Apresentação da multiplicação de polinômios a partir da propriedade distributiva, notando que pode-se multiplicar um polinômio por polinômio, por um monômio ou por um número real.
    - Será ligado com o Algeplan mostrando como uma multiplicação, alinhando as peças de forma perpendicular, e lembrando o que cada peça representa.
- Demonstração da fatoração a partir da multiplicação, mostrando que quando você descobre as raízes de um polinômio, você pode fatorar ele; também demonstrando fatoração por evidência
    - Com o Algeplan será demonstrado como uma forma de "fazer retângulos" , e de perceber semelhanças.
    - Por exemplo, se fossem dados a expressão $x^2 + 5x + 6$, poderiam fatorar-lo da forma a seguir:

Figura 12 - Fatoração "formando retângulos"



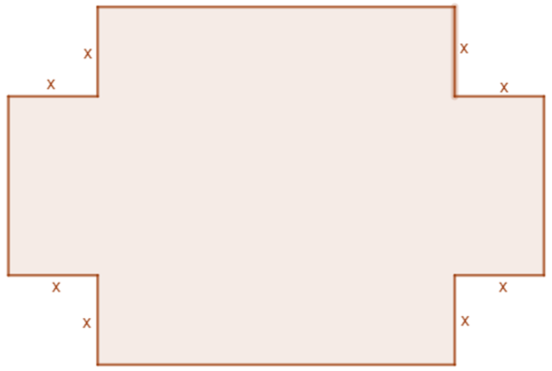
Fonte: Elaborado pelos autores

- Exibição dos produtos notáveis: Quadrado da soma, quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença.
    - Para o quadrado da soma, será mostrada a representação geométrica utilizando o Algeplan, e nos *slides*.

Segunda Atividade (60min)

Como os alunos estarão dispostos em grupos, daremos outra folha a cada aluno, pediremos que cortem seus 4 cantos com tamanho x, assim como retrata a imagem

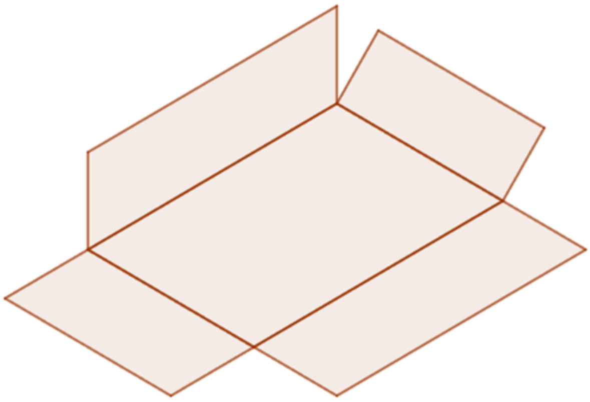
Figura 13 - Cortes do papel



Fonte: Acervo dos autores

Sobre essa figura os alunos serão pedidos para escreverem expressões que representem a área, e o perímetro, considerando que as dimensões são 30 cm por 21 cm. Depois de resolvido, pediremos para que eles dobrem os cantos para assim formar uma pequena caixa, exemplificado a seguir:

Figura 14 - Caixa



Fonte: Acervo dos autores

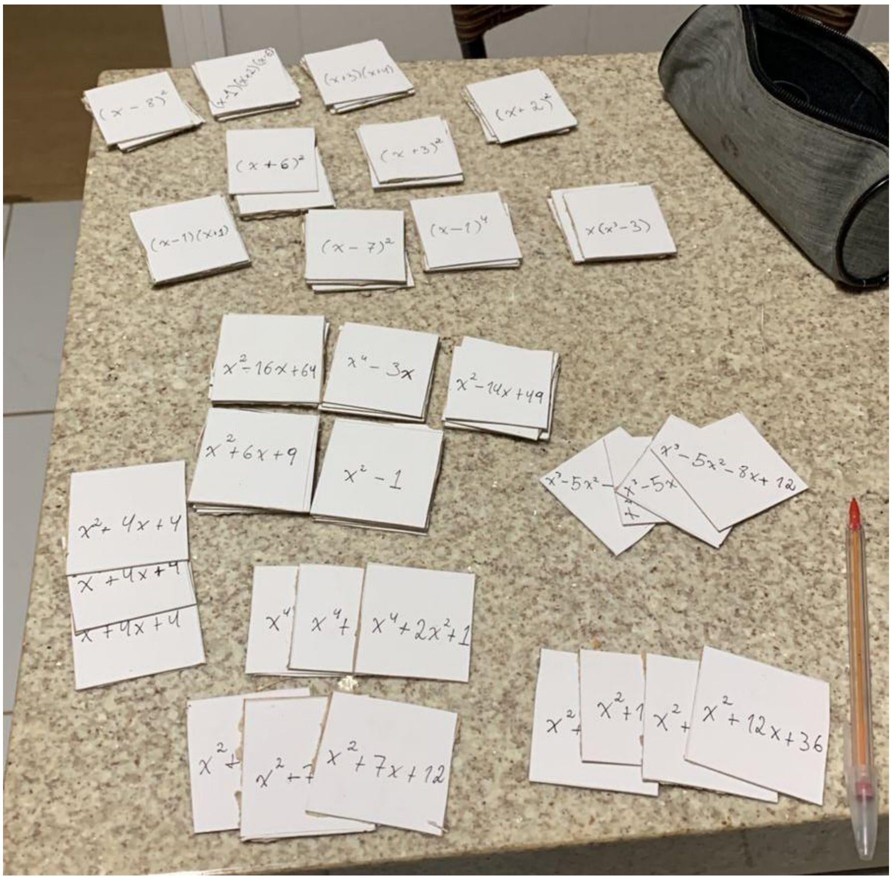
Com a caixa montada, os alunos serão pedidos para escrever uma expressão que represente o volume da caixa e a sua área superficial. Depois disso, será pedido que eles achem o valor que deixaria o volume, e área máximos.

Vide roteiro da atividade.

Atividade final (40min)

Caso tenha mais do que cinco grupos, os alunos serão redistribuídos em apenas cinco grupos, para cada um deles será entregue um baralho de jogo da memória de polinômios (veja imagem). Cada baralho contém 20 cartas de polinômios, sendo 10 pares de modo que cada carta do par é uma representação do polinômio, em sua forma fatorada e expandida. Eles utilizaram o último momento para jogar em seus grupos quantas partidas conseguirem do jogo da memória. O objetivo é ajudá-los no reconhecimento da forma fatorada de um mesmo polinômio, com grande foco nas expansões de produtos notáveis.

Figura 15 - Jogo da memória



Fonte: Acervo dos autores

Referências Bibliográficas:

SILVA, Regina Coelly Mendes da. **Utilizando o algeplan como recurso didático para a compreensão de expressões algébricas**. 2014. 93 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/14442/1/RCMS12052014.pdf. Acesso em: 31 out. 2023.

1.7.2. Relatório

Na manhã do dia quatro de novembro realizamos o PROMAT em três professores, por conta da viagem já prevista e avisada com antecedência pelo Ruan desde o início do ano letivo. Com isso, não tivemos imprevistos pois tínhamos ciência da ausência dele. Diferente dos outros grupos de estágio, nossa turma continuou unida e vieram 13 alunos, alguns apreensivos para o ENEM, outros nem tanto. Com as carteiras já organizadas em grupos de quatro e cinco pessoas, os alunos se sentaram onde bem queriam.

Iniciamos com a retomada das atividades do encontro anterior, porém, como não tivemos aula na semana passada, os alunos acabaram esquecendo e não fizeram, por isso, resolvemos parar a resolução e iniciar a aula em seguida.

Iniciamos apresentando o Algeplan, deixando um conjunto de peças por equipe e uma folha sulfite para cada, e no quadro escrevemos uma tabela, contendo uma coluna para identificação da peça, uma para as dimensões, outra o perímetro e o último para a área. Estipulamos os valores dos lados dos 3 quadrados do Algeplan, sendo que um dos quadrados tinha lado 1, outro lado y, e o terceiro quadrado tinha lado x, assim, com as medidas dos quadrados descobriram as medidas dos retângulos e montaram as planilhas. De início, os estudantes apresentaram dificuldade quando o assunto era área e perímetro, pois muitos sabiam o que significava cada coisa, outros não lembravam o conceito. Para auxiliar, fizemos a eles a analogia do terreno de grama cercado, onde o perímetro seria a cerca e a grama de dentro seria a área.

Seguimos com a atividade e outra dificuldade apareceu quando alguns alunos realizavam a multiplicação de x vezes x. Nesse caso, muitos retornavam com o resultado de $2x$ e não x^2. Após auxiliá-los, uma das alunas até disse que nunca mais iria esquecer de tantas vezes que repetimos o processo de multiplicar o “x” duas vezes. Após anotarem os perímetros e áreas das peças, escrevemos alguns polinômios no quadro e pedimos para que eles, com as peças do Algeplan, realizassem a associação do valor referente a peça com o valor do polinômio, que teve sucesso sem muitas dificuldades. Para finalizar essa parte realizamos o processo inverso, colocamos algumas peças em uma folha sulfite e pedimos para que eles nos respondessem qual o valor polinomial correspondente.

Ao finalizar esta parte partimos para a formalização do conceito de polinômios, o que são, como são formados, e realizar operações com eles, dentre as quais adição, subtração, multiplicação e fatoração. Não exploramos a divisão por ser um conteúdo abordado no ensino médio, que foge do escopo do PROMAT realizado no terceiro ano, que tem mais foco em conteúdos do ensino fundamental, tal como instruído pela regente da matéria.

Ao falar de multiplicação de polinômios introduzimos o conceito da fatoração e da distributiva e novamente percebemos alguns equívocos nos resultados dos alunos, principalmente em algumas multiplicações como, por exemplo $(x+1)*(x+2)$, na qual os alunos acabam multiplicando apenas o x por $(x+2)$ e esquecem do 1 que o acompanha. Também continuamos a notar os erros básicos de $x*x = 2x$ e não x^2, porém, com bastante conversa e outros exercícios, os alunos realizaram as atividades com sucesso. Ainda sobre multiplicação, fizemos um experimento utilizando o Algeplan, mostrando as nuances dos polinômios na geometria. Tínhamos uma expressão dos lados de um retângulo medindo $(x+1)$ e $(x+2)$, com isso eles montaram a área interna.

Após a conclusão dessa atividade realizamos a última atividade que foi o jogo da memória de polinômios. O jogo da memória consiste em achar dois pares iguais, e para que eles encontrem quais pares são iguais, eles tinham de usar as operações aprendidas com polinômios, deixamos o conjunto de peças do algeplan com eles para que eles utilizassem na resolução das peças que são iguais. Esse jogo teve bastante sucesso, pois os alunos estavam todos trabalhando em conjunto para descobrir as peças que são iguais, antes de entrarem na competição do jogo da memória em si.

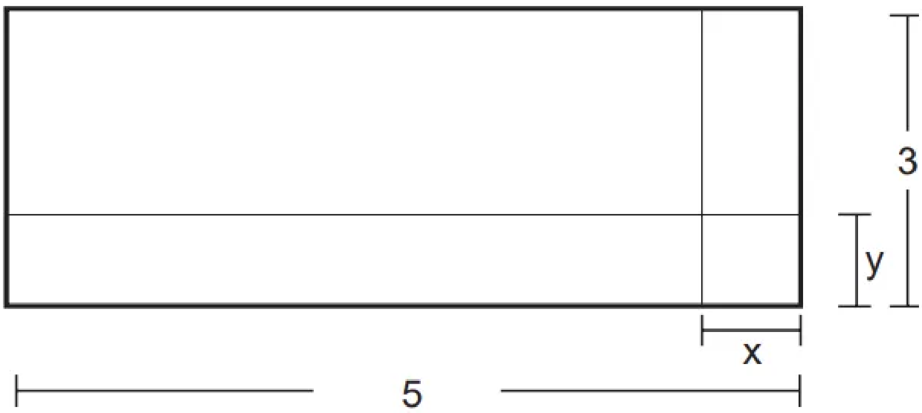
Em conclusão, tivemos sucesso nos nossos objetivos, os alunos compreenderam o conteúdo de forma tranquila, e todos estavam com facilidade para realizar as contas ao final da aula. O Algeplan excedeu nossas expectativas, a forma com qual ele fez acessível o entendimento do conteúdo nos surpreendeu; Eles estavam conseguindo fazer manipulações que nas aulas anteriores estavam com dificuldade com êxito e mais facilidade. Eles tiveram uma visão mais completa da relação entre a geometria e a álgebra, que foi em grande parte devido à elegância do Algeplan. Em nossa visão, essa foi uma das aulas mais elegantemente executadas e que teve mais êxito em alcançar seus objetivos.

1.7.3. Materiais utilizados

- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. (Enem) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).

   Nessas condições, qual será a área perdida do forro após a primeira lavagem?



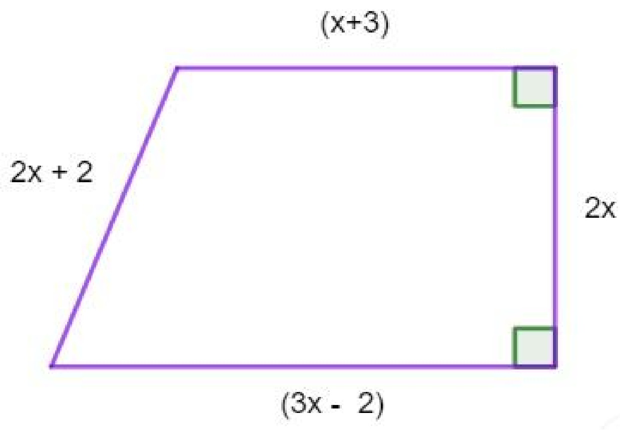
2. Qual é a soma dos coeficientes do polinômio

   $P(x) = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^{100}$?

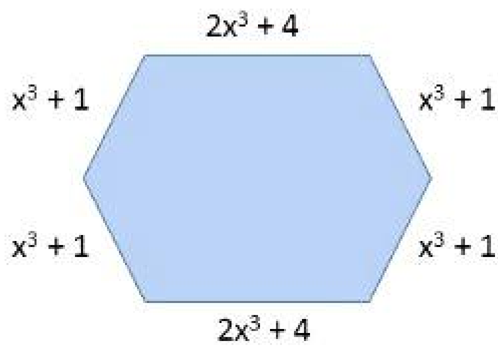
3. Dado que as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são 0,1,-1, calcule $P(2)$

4. Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ em que a, b e c são números reais, então qual o valor de $a - b + c$?

5. Qual o polinômio que representa o perímetro do trapézio a seguir:



6. Qual o valor do perímetro da figura abaixo:



7. Fatore (escreva em forma de produtos) os polinômios a seguir:

   a. $8ab + 2a^2b + 4ab^2$

   b. $25 + 10y + y^2$

   c. $9 - k^2$

8. Qual deve ser o valor de m, para que o polinômio a seguir tenha grau 2?

$$P(x) = (m^2 - 9)x^3 + (m + 3)x^2 + 5x + m$$

9. Indique o grau dos polinômios:

   a. $2x^2 + 3$

   b. $9a^4 - 2a^6$

   c. $7y^3 + 3y - 5$

10. Na resolução de problemas é comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões e equações que nos ajudam a resolver o problema. Imagine por exemplo que, em determinados problemas os enunciados nos levem às seguintes construções geométricas e suas dimensões:
    a. A primeira figura é uma região retangular de dimensões x e (x + 5). Determine as expresssẽos do perímetro e da área desse poliedro
    b. A segunda figura representa um cubo com arestas de medida x. Determine as expressões da área superficial e do volume desse polígono
    c. A terceira figura representa um paralelepípedo, com arestas de medidas (x + 4) e x. Determine as expressões de área superficial e volume desse polígono.
    d. Qual a expressão que representa a soma das áreas superficiais dessas figuras.
    e. Qual a diferença da medida da superfície do cubo e a medida da superfície do paralelepípedo

1.8. ENCONTRO 8 – 11/11/2023

1.8.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Geometria plana: Retas e suas relações com ângulos; Triângulos, classificações e suas semelhanças; Teorema de Tales.

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral:

(EF06MA19) Identificar e compreender as características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

(EF07MA24) Construir triângulos, usando instrumentos de desenho, régua e compasso, reconhecer e compreender a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados, compreender e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Objetivos específicos:

- Compreender o conceito de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares e retas paralelas cortadas por uma reta perpendicular
- Reconhecer por imagens e axiomas os conceitos de ângulos complementares, suplementares, opostos ao vértice, alternos internos e alternos externos
- Compreender o conceito de semelhança e congruência de triângulos reconhecendo as propriedades dessas relações.
- Compreender e utilizar as relações métricas no triângulo retângulo.
- Reconhecer e aplicar o teorema de Pitágoras.
- Conhecer e aplicar as relações trigonométricas no triângulo retângulo.
- Resolver e elaborar problemas, de diferentes contextos, envolvendo as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, folha sulfite, slides, projetor, marca-texto ou lápis coloridos, tesoura

Encaminhamentos metodológicos:

- Dispor os alunos em grupos;
- Apresentar o conteúdo com ajuda dos *slides*;
- Resolver as atividades propostas;
- Auxiliar os grupos na resolução de problemas com material manipulativo;

1. **Revisão da aula anterior (15min)**

Começaremos a aula revisando a aula anterior ajudando os alunos com dúvidas remanescentes em suas tarefas.

2. **Apresentação de conteúdo (2h)**

Com o auxílio dos *slides*, que podem ser encontrados em https://www.canva.com/design/DAFzos-Xbs0/P1xiCMk2KYGefnCOgfIODg/edit veremos:

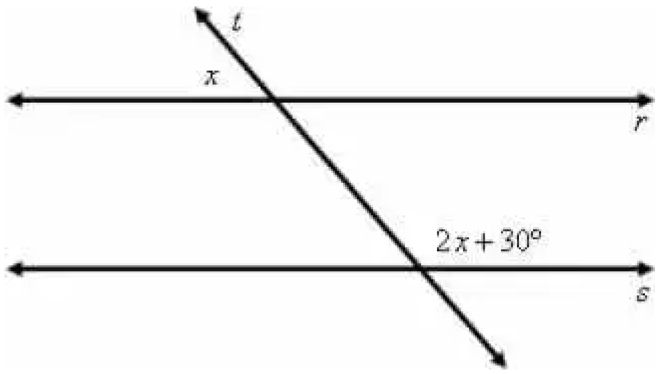
Posições relativas entre retas e os ângulos que elas formam

Iniciaremos com uma revisão do conteúdo de retas e ângulos, tais como posições entre retas, ângulos opostos pelo vértice e ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, utilizando-se de imagens para fixar o conteúdo, a fim de que os alunos sejam capazes de observar as semelhanças dos ângulos.

Com a imagem projetada, iremos reproduzir no quadro a mesma para fins educacionais e mediremos com o transferidor os quatro ângulos formados pelo desenho.

Em seguida, apresentar com imagens o conceito de ângulos complementares e suplementares, para que os alunos consigam realizar o seguinte exercício:

(FAM–SP) Dadas as retas r e s, paralelas entre si, e t, concorrente com r e s, calcule o valor de x:



<u>*Resolução*</u>: $x = 50°$

Tipos de Triângulos (a partir de seus lados e ângulos)

Novamente, com o uso dos *slides*, será projetado um *slide* com os três tipos de triângulos em relação às medidas de seus ângulos (acutângulo, obtusângulo e retângulo) e outro com três tipos de triângulos em relação às medidas de seus lados (equilátero, isósceles e escaleno). Será assim comentado sobre sua nomenclatura e explicado que

- Um triângulo equilátero tem todos os **lados** iguais;
- Um triângulo isósceles tem apenas dois de seus **lados** iguais;
- Um triângulo escaleno tem todos seus **lados** diferentes;
- Um triângulo acutângulo tem todos os **ângulos** menores que 90°;

- Um triângulo retângulo tem algum de seus **ângulos** igual a 90°;
- Um triângulo obtusângulo tem algum de seus **ângulos** maior que 90°.

Em seguida, iremos desenhar no quadro (no mínimo) seis triângulos de classificações diferentes e, então, iremos pedir para que os alunos classifiquem eles. É importante reforçar que um desses tipos de classificação é pelos **ângulos** do triângulo, enquanto a outra é por seus **lados**, dessa forma, por exemplo, um triângulo pode ser isósceles *e* retângulo.

Soma dos ângulos interno do triângulo

Após a atividade de reconhecimento anterior, iremos passar o postulado que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

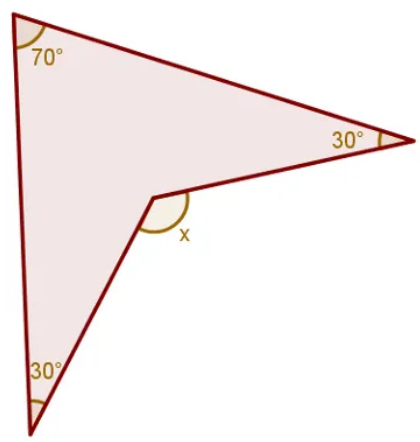
Para auxiliar na intuição, iremos utilizar de uma atividade de desenho:

- Pegue uma folha e desenhe um triângulo;
- Recorte esse triângulo;
- Pinte cada ângulo de uma cor diferente;
- Dobre cada ponta para dentro, de modo que todas se toquem e cubram todo o triângulo.

O professor deve realizar em sala, também, com os alunos os passos. Após, será apresentado para eles o seguinte exercício:

Qual é a medida do ângulo representado por x na figura a seguir?

Figura 16 - Exercício



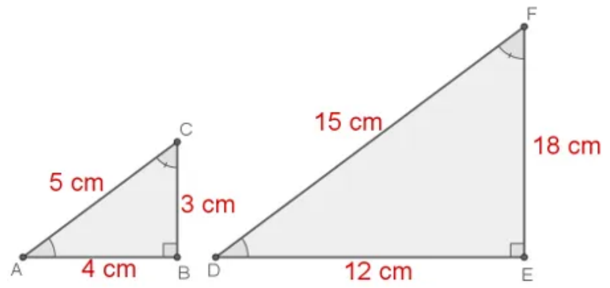
Fonte: Exercícios sobre soma de ângulos, Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-soma-dos-angulos-internos-um-triangulo.htm, acessado em 10/11/2023.

<u>*Resolução*</u>: 130º

Casos de semelhança de triângulos

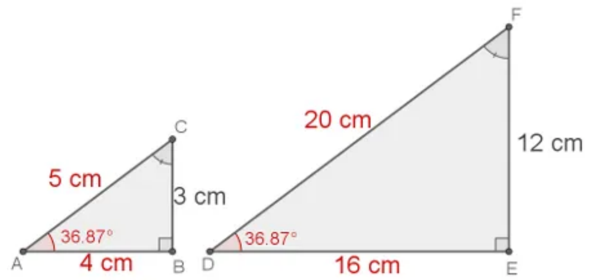
Na sequência, serão apresentados três casos de semelhança entre triângulos: *AA* (ângulo-ângulo), *LLL* (lado-lado-lado) e *LAL* (lado-ângulo-lado) pelo uso das seguintes imagens (presentes nos *slides*)

Figura 17 - Caso LLL



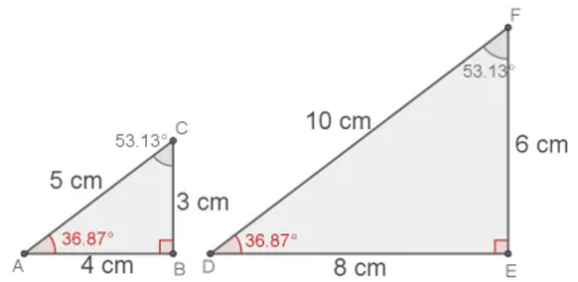
Fonte: O que é semelhança de triângulos, Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-semelhanca-triangulos.htm. Acesso em 10/11/2023.

Figura 18 - Caso LAL



Fonte: Fonte: O que é semelhança de triângulos, Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-semelhanca-triangulos.htm. Acesso em 10/11/2023.

Figura 19 - Caso AA



Fonte: O que é semelhança de triângulos, Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-semelhanca-triangulos.htm. Acesso em 10/11/2023.

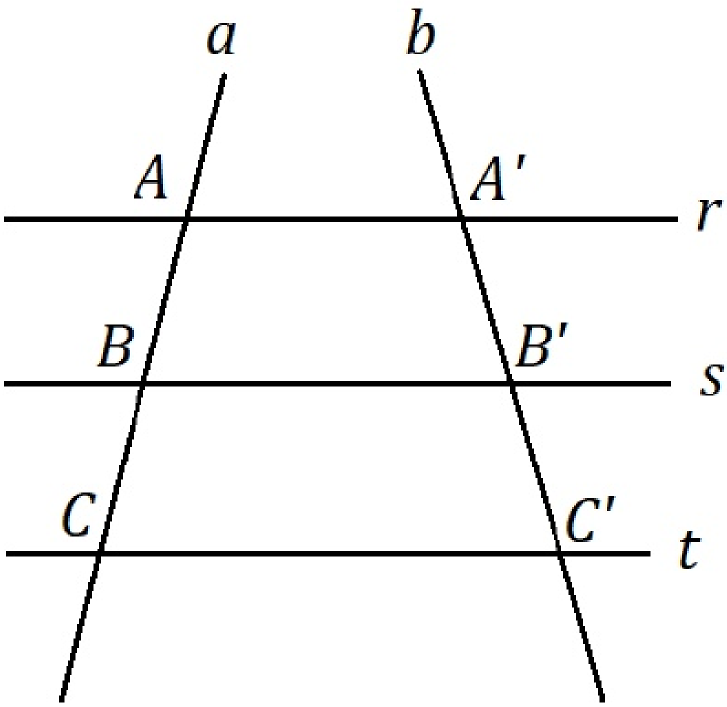
É necessário chamar atenção para o motivo que a semelhança é útil em resoluções de problemas geométricos: Os lados semelhantes são proporcionais uns aos outros. Ou seja, se dois triângulos são semelhantes e o lado de um mede x e o lado do outro mede $2x$, então **todos** os lados do triângulo maior serão exatamente *duas vezes* maior. E, mais do que isso, que a razão entre os lados semelhantes é sempre a mesma.

Ou seja, no caso dos triângulos anteriores, temos que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

Teorema de Tales

Após explicado isso, iremos passar o teorema de Tales, mostrando aos alunos sua semelhança com as ideias de semelhança de triângulos, com retas paralelas sendo cortadas por retas transversais sendo proporcionais.

Figura 20 - Teorema de tales



Fonte: Teorema de Tales, Infoescola. Disponível em https://www.infoescola.com/matematica/teorema-de-tales/, acessado 10/11/2023.

Mostrando que os segmentos de reta formados entre retas iguais, cortadas por transversais diferentes, são proporcionais, como por exemplo: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Ou, os segmentos da mesma reta também proporcionais entre si, como por exemplo: $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

De fato, o foco da explicação deve estar em todos os tipos de proporcionalidade entre os segmentos e a aplicação do teorema em descobrir distâncias e a geração de segmentos proporcionais quando não se sabe ao certo seu valor.

Teorema de Pitágoras

Na sequência, exploraremos as relações fundamentais que regem os triângulos retângulos. Para começar, definiremos os conceitos de catetos e hipotenusa.

- Os catetos são os dois lados que formam o ângulo reto;
- A hipotenusa é o lado oposto a esse ângulo.

Em seguida, apresentaremos o enunciado do teorema de Pitágoras: *Este teorema afirma que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*, expresso matematicamente como $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são os catetos e c é a hipotenusa.

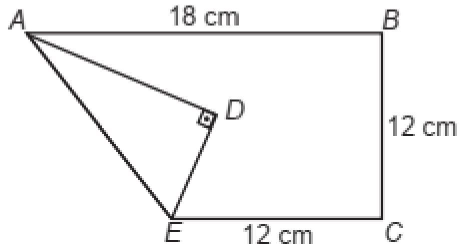
Resolução de problemas (50 minutos)

Ao longo do restante da aula, nos dedicaremos à resolução dos seguintes problemas. A abordagem será feita em grupo de até cinco alunos.

Após cada problema, dedicaremos um tempo para discutir as diferentes abordagens e soluções propostas, buscando promover um ambiente de aprendizado dinâmico e participativo.

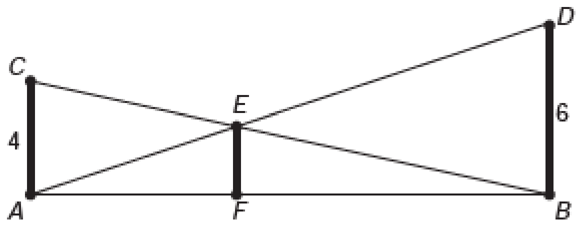
1. Calcule a diagonal de um cubo do qual é conhecido seu lado.
    a. E se fosse um paralelepípedo, cujo se conhece altura, largura e profundidade?
2. (ENEM) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma

folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou a dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, qual a medida do segmento AE?

3. (Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

Referências

BROCKVELD, Paloma. **Classificação dos triângulos**. 2012. Disponível em: https://reforcandomatematica.blogspot.com/2013/06/classificacao-dos-triangulos.html. Acesso em: 27 nov. 2023.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **"Teorema de Tales"**; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm. Acesso em 27 de novembro de 2023.

1.8.2. Relatório

Na aula do dia 11 de novembro realizamos o PROMAT novamente com os quatro professores, pois o Ruan já havia retornado de viagem. Organizamos as carteiras em grupos de quatro pessoas. A aula começou com 12 alunos, mais do que havíamos esperado por conta do ENEM que aconteceria no dia seguinte.

Começamos a aula ajudando os alunos com as dúvidas que tinham da lista da última aula, auxiliando a todos que nos solicitaram. Depois desse momento inicial começamos com os *slides*, explicando o tópico da aula, geometria plana, e como iríamos começar nosso estudo. Utilizamos os *slides* para explicar as posições relativas entre retas (paralelas, concorrentes, perpendiculares, duas paralelas e uma transversal), com algumas formas mais "lúdicas" de se expressar o conceito, sem remover suas nuâncias. Com o último exemplo, explicamos as relações dos ângulos formados por essas retas no quadro, tal como seus nomes formais, deixando os alunos pensarem em conjunto para que o conteúdo fizesse mais sentido para cada um. Um exercício foi passado ao final desse conteúdo, para que os alunos treinassem o que aprenderam. Esse exercício foi de rápida resolução, com todos concluindo em menos de cinco minutos, talvez demonstrando que a escolha foi muito simples para o nível que eles já estavam do conteúdo.

Depois disso, começamos o conteúdo de triângulos, explicando as diferentes classificações de triângulos em relação aos seus lados e ângulos. Na sequência foi dado um exercício de reconhecimento, que teve bastante sucesso, as "armadilhas" no exercício foram efetivas, mostrando aos alunos que não se deve ir apenas no julgamento ao olho se existem medidas que foram dadas.

Seguindo no mesmo assunto, foi feito um experimento junto com os alunos, para demonstrar que todos os triângulos têm soma de ângulos internos igual a 180º. Nessa atividade, pedimos que eles desenhassem um triângulo qualquer em uma folha A4 que entregamos a eles e depois que fosse feito o recorte da figura com uma tesoura. Assim, ao dobrar o triângulo conforme indicamos, todos fizeram a mesma observação, que ao dobrar as pontas no centro, formavam um ângulo raso, todos tiveram sucesso e compreenderam bem esse experimento, embora alguns se mostraram entediados com esta atividade que não foi desafiadora para eles pois já sabiam da propriedade e por se tratar de um experimento mais intuitivo.

Em seguida, fizemos um problema sobre a soma de ângulos internos de um triângulo, que cada grupo de quatro alunos respondeu e mostrou sua forma de resolução em frente a turma. Foi proveitoso pois várias formas de resolução foram encontradas e compartilhadas.

Explicamos então sobre a semelhança de triângulos e demos a eles alguns exemplos que explicitam como esse conteúdo pode ser apresentado, pois estavam todos com medo do ENEM. Assim, decidimos fazer essa parte mais relacionada com isso, para não só manter o foco dos alunos, mas também para possivelmente ajudá-los. Para isso, apresentamos uma questão de vestibular sobre o teorema de Tales, em que alguns alunos conseguiram responder com facilidade, mas outros tiveram dificuldades para escrever uma equação e assim resolvê-la, de passar as informações de linguagem natural para linguagem algébrica. Também explicamos como eles podem encontrar e interpretar este tipo de problema em provas como o ENEM.

Por fim, passamos o teorema de Pitágoras, e explicamos o que ele significa, e o caso de aplicação (triângulos retângulos), finalizando com um problema, onde os alunos teriam que encontrar a medida da diagonal de um cubo, no qual se conhece o lado. Os alunos tiveram dificuldade nesse problema em identificar as medidas esperadas, reconhecer que existem dois triângulos retângulos que você pode conhecer a diagonal. Tivemos dificuldade como professor para fazer a transposição didática a fim de que os alunos reconhecessem quais são os elementos da geometria plana (triângulos retângulos) na geometria espacial (cubo). No final da aula, uma possível solução foi explicada, como o teorema de Pitágoras continuava sendo igual em três dimensões, apenas adicionando mais uma variável.

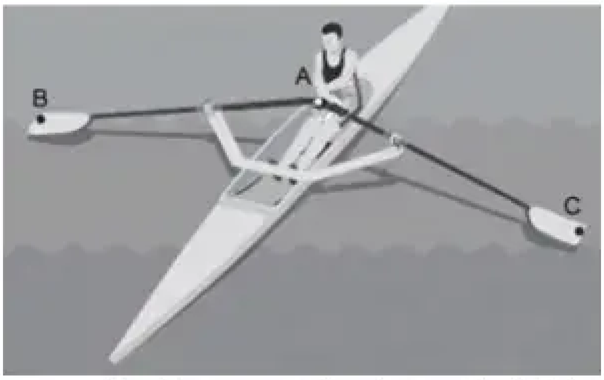
1.8.3. Materiais utilizados

- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. Indique se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. No caso de ela ser falsa, exiba um contraexemplo.
    a. ( ) Todo triângulo isósceles é equilátero.
    b. ( ) Todo triângulo equilátero é isósceles.
    c. ( ) Todo triângulo retângulo e escaleno.
    d. ( ) Existe triângulo retângulo isósceles.
    e. ( ) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

2. (Enem 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.O remo de assento deslizante é um

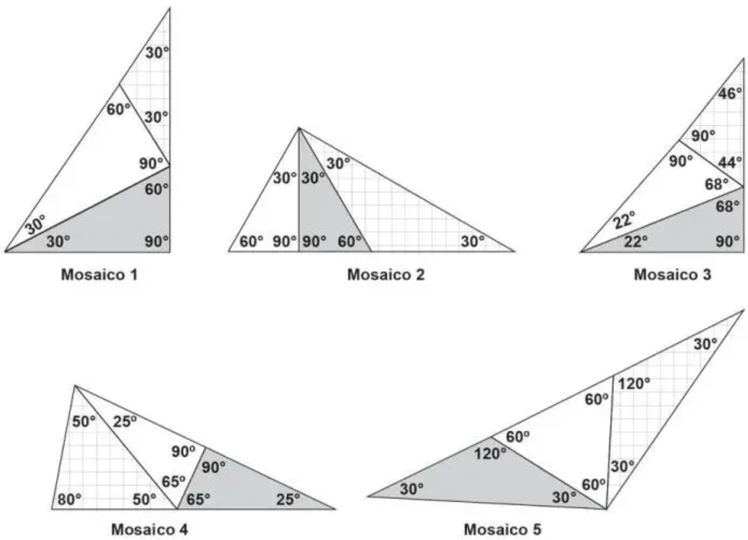
esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.
Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo BÂC tem medida 170º.



Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

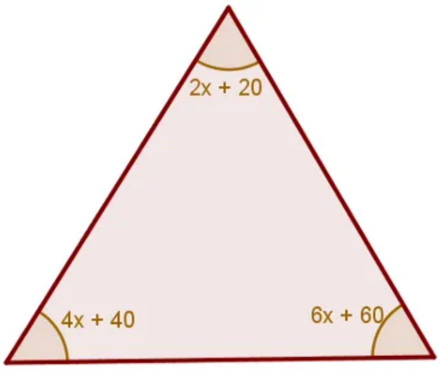
Qual tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição?

3. (Enem 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

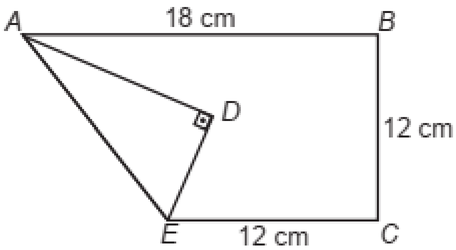


Na figura, qual é o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir?

4. Qual é o valor de x no triângulo a seguir?



5. (ENEM) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou a dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, qual a medida do segmento AE?

6. A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a figura 2.

Figura 1

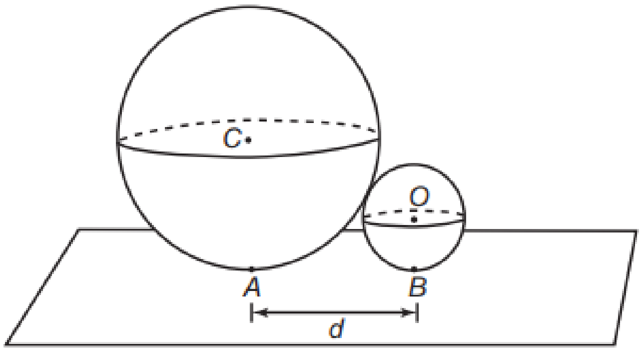
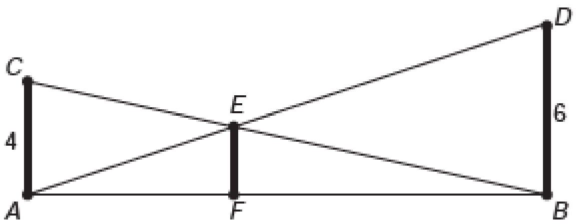


Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d.

Nessas condições, qual a razão entre "d" e o raio do bolim?

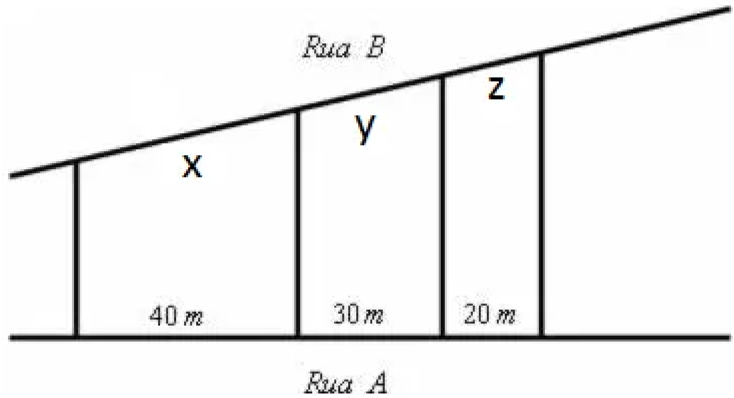
7. (Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

8. (Unesp) Um obelisco de 12 m de altura projeta, num certo momento, uma sombra de 4,8 m de extensão. Calcule a distância máxima que uma pessoa de 1,80 m de altura poderá se afastar do centro da base do obelisco, ao longo da sombra, para, em pé, continuar totalmente na sombra.

9. (Fuvest) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de x, y e z em metros sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?



1.9. ENCONTRO 9 – 18/11/2023

1.9.1. Plano de aula

Público-alvo: Alunos do PROMAT (1º ao 3º ano do Ensino Médio e alunos da graduação).

Conteúdos: Geometria Plana: Área e Perímetro de formas geométricas planas.

Professores: Eduardo Zeni, Milena Higashi, Ruan Gallio, Shimmer Alves Silva.

Objetivo geral:

(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes;

(EF08MA19) Resolver e elaborar situações problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos).

Objetivos específicos:

- Reconhecer e aplicar fórmulas para cálculo de área de figuras planas.

Tempo de execução: 4 horas aula (3 horas e meia).

Recursos didáticos: Lousa, giz, folha sulfite, *slides*, projetor, marca-texto ou lápis coloridos, tesoura, barbante, objetos redondos.

Encaminhamentos metodológicos:

- Dividir os alunos em grupos;

- Apresentar a fórmula do quadrado com auxílio de alguma construção quadriculada;
- Disponibilizar aos alunos papel e réguas;
- Ajudar os grupos com a resolução do problema proposto;
- Refletir em grupo sobre os resultados;
- Disponibilizar barbante e tesoura para os alunos;
- Realizar o experimento proposto;
- Discutir resultados;
- Explicar a área do círculo.

1. **Revisão da aula anterior (15min)**

Começaremos a aula revisando a aula anterior ajudando os alunos com dúvidas remanescentes em suas tarefas.

2. **Apresentação do problema (1h25min)**

Essa parte da aula será dividida em três momentos:

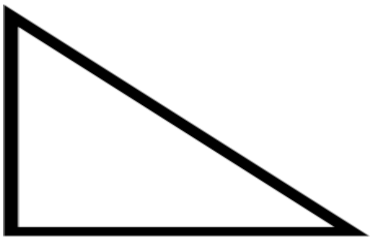
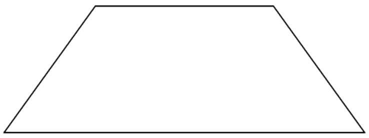
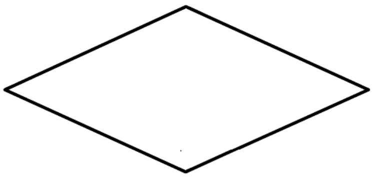
1º Momento (10min)

Neste primeiro momento os docentes apresentarão a forma de calcular a área de um quadrado, usando por exemplo um tabuleiro de xadrez, mostrando aos alunos como eles têm 8 fileiras e 8 colunas, e que, contando todos os seus quadrados, o tabuleiro tem 64 ao total. Assim, será dado aos alunos a fórmula da área do quadrado, ou seja, a medida do lado multiplicada por ela mesma.

2º Momento (1h)

No segundo momento, os alunos serão instruídos a construir uma tabela, contendo os seguintes elementos: polígono, área e perímetro.

Quadro 6- Modelo para resolução de problemas sobre polígonos

Polígono	**Área**	**Perímetro**
		
		
		
		
		

Fonte: Elaborado pelos autores

Com o conhecimento que eles obtiveram no primeiro momento, eles terão que achar fórmulas gerais para outros polígonos, em ordem sendo: triângulo; retângulo; paralelogramo; trapézio; losango. O intuito desta atividade é a exploração matemática para, partindo de um conhecimento prévio que é a área do quadrado, juntamente com o auxílio dos docentes, sejam capazes de deduzir a forma de calcular a área de outras figuras planas, por meio do desenho das formas e de sua manipulação.

3º Momento (15min)

Nesse terceiro momento, os alunos serão encorajados a eleger um representante de cada grupo a ir para a frente do quadro para dizer seus diversos achados, o que conseguiram concluir, e caso não concluíram, por que, e o que poderiam ter feito.

3. **Experimento Círculo (40min)**

Após o retorno do intervalo serão entregues às equipes barbante, régua e tesoura e objetos circulares para realizar o experimento de medir com o barbante Serão pedidos para montar uma tabela, como a seguinte:

Quadro 7- Modelo para experimento com circunferências

Objeto	Diâmetro	Circunferência

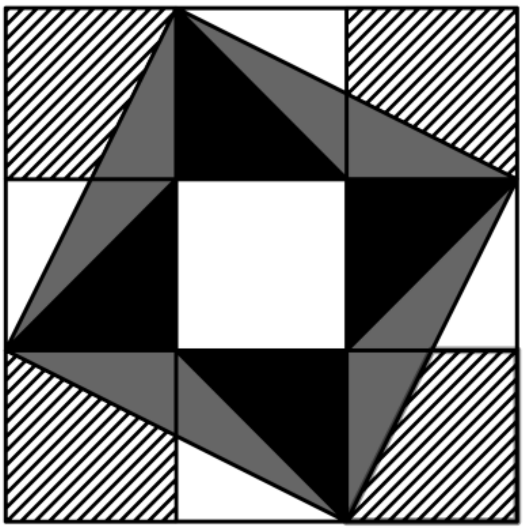
Depois de feito isso, eles serão instruídos a dividir a circunferência pelo diâmetro e discutirão os resultados em sala com seus colegas.

Na sequência os docentes explicarão a fórmula para cálculo do comprimento da circunferência do círculo. Após isso, será explicado como todos os círculos estão relacionados, e fazer uma experiência com a turma descobrindo pi empiricamente, fazendo a média simples de todos os resultados por eles obtidos para a razão entre a circunferência e o diâmetro.

Ao fim, será passado uma demonstração em um vídeo da área de um círculo, o vídeo pode ser encontrado em: (https://www.youtube.com/watch?v=l6kFz0dQA5I&t=60s)

4. **Problemas e Exercícios (1h)**

1. (OBMEP) A figura foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadradinhos, cada um com área igual a 4 cm².

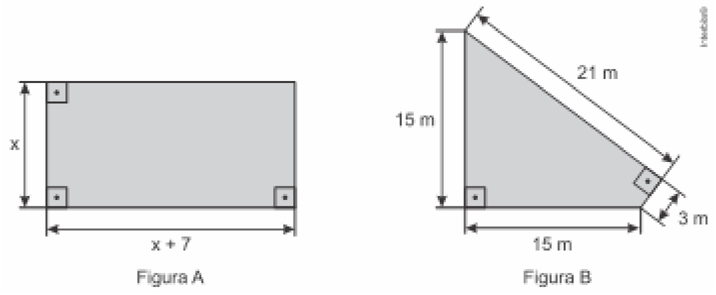


a) Qual é a área total pintada de preto?

b) Qual é a área total listrada?

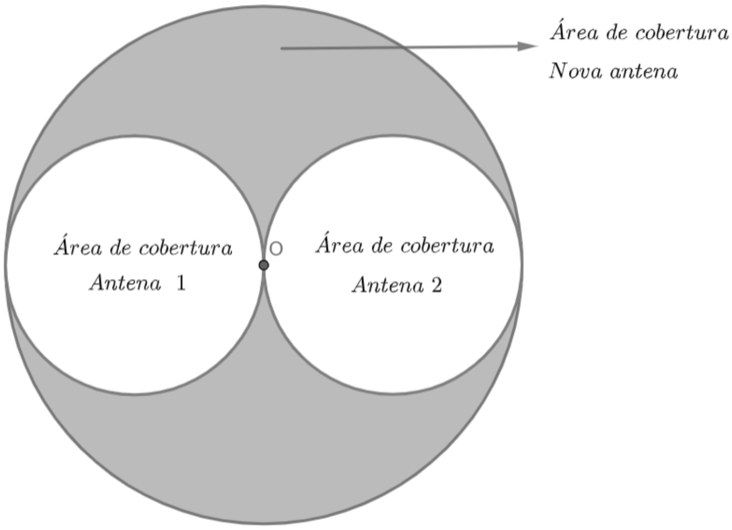
c) Qual é a área total pintada de cinza?

2- (Enem 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



Para satisfazer o filho mais novo, quais serão as medidas, em metro, do comprimento e da largura desse terreno retangular procurado?

3-(Enem 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O como mostra a figura.



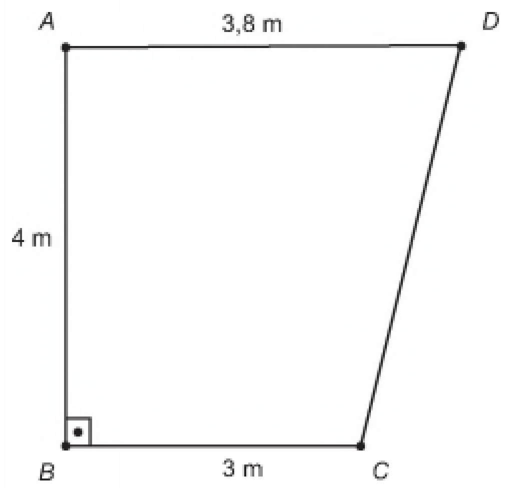
O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, em quantos quilômetros quadrados a medida da área de cobertura foi ampliada?

4-(Enem 2017) Um fabricante recomenda que, para cada m² do ambiente a ser climatizado, são necessários 800 BTUh, desde que haja até duas pessoas no ambiente. A esse número devem ser acrescentados 600 BTUh para cada pessoa a mais, e também para cada aparelho eletrônico emissor de calor no ambiente. A seguir, encontram-se as cinco opções de aparelhos desse fabricante e suas respectivas capacidades térmicas:

- Tipo I: 10 500 BTUh
- Tipo II: 11 000 BTUh
- Tipo III: 11 500 BTUh
- Tipo IV: 12 000 BTUh
- Tipo V: 12 500 BTUh

O supervisor de um laboratório precisa comprar um aparelho para climatizar o ambiente. Nele ficarão duas pessoas mais uma centrífuga que emite calor. O laboratório tem forma de trapézio retângulo, com as medidas apresentadas na figura.



Para economizar energia, o supervisor deverá escolher o aparelho de menor capacidade térmica que atenda às necessidades do laboratório e às recomendações do fabricante.

Qual será o aparelho que deverá ser escolhido pelo supervisor?

1.9.2. Relatório

Na aula do dia 18 de novembro realizamos o PROMAT com os quatro professores. Organizamos as carteiras em grupos de cinco pessoas. Percebemos que a quantidade de alunos diminuiu: realizamos a aula com nove alunos. Acreditamos que isso se deu pois o ENEM já havia passado, o qual era o maior objetivo dos alunos estarem participando.

O início das atividades em sala atrasou, pois os professores esqueceram de organizar previamente os materiais necessários e tiveram que buscar no LEM.

Entretanto, os outros dois professores que ficaram em sala usaram esse tempo para ajudar os alunos com a lista de exercícios da aula passada. Percebemos que poucos haviam feito, logo, nesses poucos minutos incentivamos os alunos a resolverem pelo menos um exercício como fixação do conteúdo passado anteriormente.

Quando os professores chegaram com os materiais, começamos a explicação da aula: trabalhamos inicialmente com um quadrado, o qual desenhamos no quadro quadriculado. Com o desenho nosso intuito era trabalhar com a área do quadrado, para isso, pedimos quantos "quadradinhos" (formados pela malha do quadro) havia dentro do quadrado desenhado. Explicamos, então, como a área se relaciona com esse número de quadrados, ou seja, que a área é o espaço ocupado em duas dimensões (nesse caso, o quadro) e pode ser medida a partir de alguma área previamente definida como "um". Assim, explicamos que – se definirmos o quadrado da malha do quadro como o "um" – teremos, então, 49 quadradinhos dentro do quadrado desenhado e que, dessa forma, sua área seria 49 *unidades de área*. A partir disso, como catalisador para a próxima atividade, pedimos que eles notassem que esse 49 *u.a* pode ser obtido multiplicando o lado do quadrado por si mesmo.

Com esse contexto, entregamos réguas, folhas e tesouras para os alunos, com o intuito que eles conseguissem fazer o mesmo para as figuras de retângulos, triângulos, paralelogramos, trapézios e losangos. Pedimos para que eles fizessem uma tabela com a figura, a área, e então cada grupo pode trabalhar em conjunto.

Foi visto uma semelhança no modo como os alunos resolviam o problema, observando que eles geralmente tentavam repartir a figura geométrica ao meio tentando deixar áreas iguais, ou repartia em triângulos, um dos alunos realizou esse mesmo processo em todas as formas e conseguiu resultado.

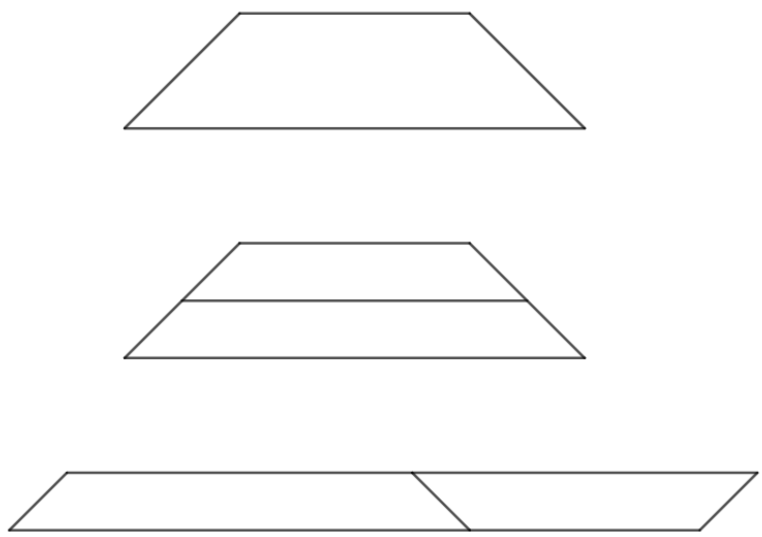
Durante todo esse processo, como havia apenas dois grupos, dois professores se revezavam por grupos e buscavam dar atenção para alunos que requisitassem.

A área de figuras como a de um triângulo foram facilmente descobertas – no entanto, como no desenho da tabela apresentava fora feito um triângulo retângulo, eventualmente pedimos para que os alunos mostrassem o porquê (se sequer fosse verdade) que a fórmula descoberta para o triângulo retângulo valia para *qualquer* outro triângulo. Nesse momento, houve mais dificuldade dos alunos pois era necessário uma construção adicional, mas finalmente três alunos conseguiram argumentar que todo triângulo pode ser separado em triângulos retângulos.

Outras figuras que causaram dificuldades foram as do trapézio e do losango. Para estas, os professores perceberam que ajudar os alunos a desenhar em um papel e recortar as figuras, incentivando para que eles mesmo realizassem outros cortes de modo a reorganizar as "peças" ajudou-os a perceber as fórmulas das áreas. De fato, tal ato de recortar, para aqueles que fizeram, provou-se de grande ajuda para perceber que a área independe do formato da figura: mesmo organizado de outra maneira, a área continua a mesma.

Ainda com relação ao trapézio, vale notar que foi a figura que mais houve diferença em como descobrir a fórmula da área. Tal atividade perdurou por duas horas, e nesse tempo, três alunos surgiram com demonstrações diferentes da fórmula da área de um trapézio isósceles: Seja separando em triângulos, em outro quadriláteros ou com construções algébricas. Um exemplo do que utilizaram foi o “corte” do trapézio no meio, horizontalmente, virando-o e anexando ao lado, vendo a figura transformar-se em um paralelogramo, de base igual à base maior do trapézio com a base menor, e altura sendo a metade da original, cuja área é exatamente a área do trapézio

Figura 21- Exemplo de trapézio



Fonte: Elaborado pelos autores

Com essa atividade, percebemos como a investigação matemática ajudou os alunos a racionalizar para si mesmo algumas fórmulas que muitas vezes haviam apenas decorado na escola, e acreditamos que nosso objetivo de "tornar a matemática intuitiva" foi alcançado.

Ao final dessa experiência, os alunos foram encorajados a partilhar suas respostas e como eles resolveram. Assim, cada aluno teve uma solução que foi particular, mas todos numa forma geral conseguiram utilizar pensamentos geométricos em conjunto para encontrar todas as fórmulas. Os alunos comentaram como a mudança de perspectiva e a manipulação das formas geométricas ajudaram eles a pensar sobre as áreas e os perímetros. Um comentário notável foi feito por um de nossos alunos “Agora a fórmula faz muito mais sentido, acho que fica mais fácil de lembrar dela até” demonstrando o sucesso da metodologia.

Na sequência, comentamos sobre como no exercício, não havíamos discutido áreas e perímetros de círculos, e explicamos que isso é devido ao fato de círculos serem “peculiares”, e para estudar essa peculiaridade, aos alunos foram entregues barbante e objetos circulares. Solicitamos que fizessem as medidas da circunferência e do diâmetro, e a razão entre elas. Após isso, fizemos em frente da sala uma média das várias razões que eles encontraram, achando um valor de 3.17 ao final, e explicando porque todas as razões eram quase as mesmas. Assim, falamos sobre a existência do pi. Após isso, explicamos a fórmula do perímetro da circunferência de forma mais geral, e após isso, passamos um vídeo que explicava de onde vem a fórmula da área do círculo de maneira simplificada, sem utilizar os princípios do cálculo de forma explícita.

Ao final da aula, colocamos um problema no projetor para que eles resolvessem, e ao final pedimos para que apresentassem suas soluções em frente da sala. Alguns alunos utilizaram raciocínios matemáticos simbólicos, enquanto outros utilizaram das ideias geométricas de manipulação de formas para resolvê-lo.

Em conclusão, essa aula demonstrou à nós o poder explicativo da investigação matemática, o conhecimento que eles construíram foi em grande parte, próprio deles, tornando-o mais pessoal, pois não foi algo dado, mas sim construído, eles sentiram uma conexão e um entendimento maior do conteúdo. No futuro talvez devêssemos utilizar mais métodos investigativos em nossas aulas, pois tivemos grande êxito em nossos objetivos.

1.9.3. Materiais utilizados

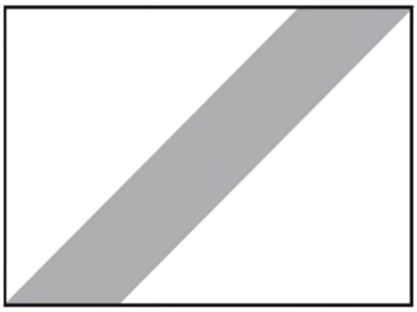
- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. (OBMEP 2007-Q10) Priscila tem uma folha de papel, branca de um lado e cinza do outro. A folha é quadrada e tem 20 cm de lado. Ela dobrou essa folha duas vezes, como indicado na figura. Depois disso, qual foi a área da parte branca que ficou visível?

2. Em um terreno retangular, com 25 metros de comprimento e 36 metros de largura, será separada uma região com o formato de um quadrado de lado medindo 7 metros para a construção de um jardim. Qual será a medida da área restante do terreno?

3. (ENEM 2017) Uma família possui um terreno retangular com 18 metros de largura e 24 metros de comprimento. Foi necessário demarcar nesse terreno dois outros iguais, na forma de triângulos isósceles, sendo que um deles será para o filho e o outro para os pais. Além disso, foi demarcada uma área de passeio entre os dois novos terrenos para o livre acesso das pessoas.

4. Os terrenos e a área de passeio são representados na figura.

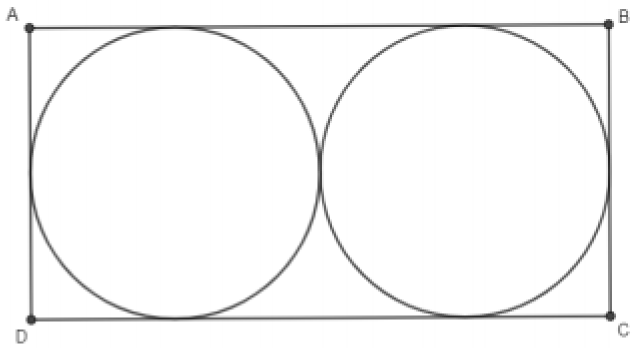
5. 

Qual será a área de passeio calculada pela família, em metro quadrado?

6. (Enem) O prefeito de uma cidade deseja promover uma festa popular no parque municipal para comemorar o aniversário de fundação do município. Sabe-se que esse parque possui formato retangular, com 120 m de comprimento por 150 m de largura. Além disso, para segurança das pessoas presentes no local, a polícia recomenda que a densidade média, num evento dessa natureza, não supere quatro pessoas por metro quadrado.
Seguindo as recomendações de segurança estabelecidas pela polícia, qual é o número máximo de pessoas que poderão estar presentes na festa?

7. No projeto da casa de Kárita há o desenho de uma área de lazer no formato de um quadrado, com 8 metros de lado. Nessa área de lazer haverá uma piscina circular com 4 metros de diâmetro, e a área restante será utilizada para a construção de um espaço de confraternização. Nessas condições, qual será a medida do espaço de confraternização? (Use $\pi = 3$.)

8. (Omini 2021 - adaptada) Wilson tem um terreno retangular e desejando plantar uma horta, colocou dois irrigadores nesse terreno, ambos com alcance circular de raio igual a 4 metros, como na figura abaixo.



A área que os irrigadores não alcançam será uma parte do terreno em que Wilson não fará a horta. Qual o valor dessa área? Utilize $\pi = 3,14$.

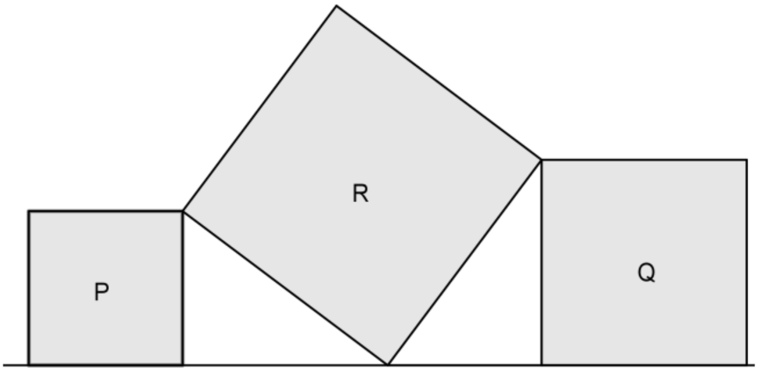
9. (Enem 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

10. (Enem - PPL) Uma escola tem um terreno vazio no formato retangular cujo perímetro é 40 m, onde se pretende realizar uma única construção que aproveite o máximo de área possível.
Após a análise realizada por um engenheiro, este concluiu que, para atingir o máximo de área do terreno com uma única construção, a obra ideal seria
    a. Um banheiro com 8 m².
    b. Uma sala de aula com 16 m².
    c. Um auditório com 36 m².
    d. Um pátio com 100 m².
    e. Uma quadra com 160 m².

11. Um agricultor precisa construir uma área com 1137,5 m² para realizar o plantio de determinada cultura. Durante os seus estudos, ele decidiu que essa região fosse determinada por um losango, com diagonal maior medindo 65 m. Nessas condições, qual deverá ser a medida da diagonal menor?

12. (OBMEP) Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24cm² e 168cm² , respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?



1.10. ENCONTRO 10 – 25/11/2023

1.10.1. Plano de aula

Gincana Promat – Roteiro

- Reuniremos todos os alunos na Sala 220 às 8h05min.

- Os alunos serão divididos em 8 grupos distintos (preferencialmente organizados por sala)

- Cada grupo receberá uma fita colorida, pois daremos o nome ao grupo segundo a cor que receber. O responsável pela distribuição das fitas do grupo será o guia do grupo.

Grupo azul – (Alisson e Vitor)
Estação 1 - Sala 49;
Grupo amarelo – (Felipe e Felipe)
Estação 2- LIM;
Grupo vermelho – (Theo e Luiza)
Estação 3- Caracol;
Grupo roxo – (Milleni e Fabrício)
Estação 4- Cantina;
Grupo branco – (Maíri e Michelli)
Estação 5- laboratório de física;
Grupo preto – (Márcio e Raiany)
Estação 6 – LEM;

Grupo verde – (Ruan e Shimmer)
 Estação 7- Hall de entrada;
Grupo marrom – (Milena e Eduardo)
 Estação 8- Parquinho;

- Explicar a dinâmica da gincana e organizar os grupos das 8:05 a 8:15;
- Direcionar os grupos para cada uma das estações 8:15;
O grupo irá inicialmente para a estação em que seu guia é um dos responsáveis;
- As atividades iniciarão às 8:20 e serão encerradas às 8:35. O grupo terá 5 minutos para se deslocar para a próxima atividade.
- As atividades serão realizadas segundo o cronograma de tempo a seguir:
* 8:20 – 8:35;
* 9:40 – 9:55;
* 8:40 – 8:55;
* 10:00 – 10:15;
* 9:00 – 9:15;
* 10:20 – 10:35;
* 9:20 – 9:35;
* 10:40 – 10:55;
* 11:00
Todos os grupos devem se dirigir para o LEM, onde será servido o lanche, e feita a premiação;

Estação 1 – Sala 49: Tangram
Local: Sala 49
Responsáveis: Alisson e Vitor
Pontuação: é contabilizada de acordo com as figuras formadas, a pontuação varia entre 1 e 2 pontos.
Material necessário: Tangram

Estação 2 – Blackjack de polinômios
Local: LIM
Responsáveis: Felipe Simão e Felipe Klumb

Pontuação: 1° colocado ganhará 9 pontos, decrescendo 1 ponto por colocação até o 8° grupo que receberá 2 pontos

Material necessário: Baralho dos polinômios com 144 cartas

Estação 3 – Torre de Hanói

Local: Caracol

Responsáveis: Theo e Luiza

Pontuação: A partir da quantidade de peças transpostas da extrema esquerda para a extrema direita podendo assim conseguir até 18 pontos e pontos extras para aqueles que concluírem o jogo com 3, 4, 5 e 6 peças em menos de 15 minutos, sendo 7 para o menor tempo, 6 para o segundo, 5 para o terceiro e assim sucessivamente. Pontos máximos possíveis: 25

Material necessário: jogos de Torre de Hanói

Estação 4 – Cantina: Jogo de Dardos das Frações

Local: Cantina

Responsáveis: Milleni e Fabrício

Pontuação: De acordo com a classificação final de cada grupo: 1o colocado: 10 pontos; 2o colocado: 9 pontos; 3o colocado: 8 pontos; 4o colocado: 7 pontos; 5o e 6o colocados: 6 pontos; 7o e 8o colocados: 5 pontos.

Material necessário: jogo de dardos e cartas com perguntas sobre frações.

Estação 5 – Laboratório de Física

Local: Lab Física

Responsáveis: Maíri e Michelli

Pontuação: 1 ponto por kit resolvido

Material necessário: balança e objetos com massas diferentes

Estação 6 – LEM (Laboratório de Ensino de Matemática)

Local: LEM

Responsáveis: Márcio e Raianny

Pontuação: cada acerto da equação de segundo grau gera 1 ponto.

Material necessário: bolas de plástico, 2 lixeiras, folhas com equações do segundo grau

Estação 7 – Hall de entrada do campus
Local: Hall de entrada do campus
Responsáveis: Ruan e Shimmer
Pontuação: 1 ponto por cada carta posicionada corretamente no varal (uma carta é considerada posicionada corretamente se, e somente se, as cartas imediatamente a direita e à esquerda forem as cartas corretas)
Material necessário: Cartas de frações

Estação 8 – Jogo dos 4 quatros
Local: em frente ao parquinho
Responsáveis: Milena e Eduardo
Pontuação: 1- 10 por número descoberto
Material necessário: 2 mesas, cadeiras, folha e caneta

1.10.2. Relatório

Na aula do dia 25 de novembro foi realizada uma gincana com todos os grupos do PROMAT e neste relatório iremos relatar a visão individual dos acontecimentos do dia, no olhar de cada um dos docentes. Os professores Eduardo e Ruan estavam liderando equipes de alunos de nossa sala, enquanto Milena e Shimmer estavam em estações com atividades que haviam preparado com sua dupla de estágio.

O professor Eduardo conduziu a equipe marrom que era composta por uma parte dos alunos da sala e notou os alunos estavam um tanto quanto abatidos por ser um sábado chuvoso.

Como se tratava de uma “competição” e conhecendo os colegas da faculdade, o professor Eduardo esteve à frente para animá-los e torná-los competitivos, é claro que sem um motivo da vitória, mas sim para que eles colocassem significado na atividade.

O primeiro "desafio", o jogo dos quatro quatros, foi realizado com sucesso: ele consiste em construir os números de 0-10 utilizando 4 algarismos quatro e as operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), houve apenas um adendo para a construção do número 10, onde é notado que está dentro das regras o uso do número "44", o que possibilita a construção $\frac{44-4}{4}$.

Partindo para atividade do tangram os alunos conseguiram com bastante tranquilidade realizar a construção dos quadrados com uma certa quantidade de peças solicitadas. Em seguida, foi realizada a atividade do *blackjack* dos polinômios. Tivemos um leve desajuste com as regras, alguns dos alunos não sabiam como funcionava o jogo, assim como o professor Eduardo, e infelizmente o professor Felipe não explicou corretamente a atividade e como se pontuava. Acabamos pontuando pouco nessa atividade e o professor Eduardo pediu para repetir uma das rodadas depois de descobrir como funcionava e perceber que estavam perdendo pontos de graça.

Seguimos para a atividade da torre de Hanói. Os alunos quando viram as torres já estavam animados pois foi um conteúdo já abordado em sala, mas por causa do nervosismo não conseguiram concluir as 3 torres com seis peças, acabou faltando tempo.

A próxima atividade: Quiz dos dardos ocorreu tranquilamente, sem nenhuma desavença ou erros. O próximo local foi o laboratório de física, nossa equipe se saiu muito bem, aliás, fomos os que mais tiraram pontos na atividade. Nos últimos dois desafios também concluíram com bastante tranquilidade.

Infelizmente a equipe marrom ficou em 3°/4° lugar, porém, a alegria no rosto deles e a vontade de responder às questões, visto que resolveram todas as etapas sozinhos foi muito prazerosa e digna de um final feliz pro PROMAT.

Enquanto isso, o professor Ruan coordenou a equipe verde, com a metade restante da sala, formada por quatro alunos. Começamos na estação sete, em que o coordenador da atividade era o professor Shimmer, conhecido dos alunos e a atividade proposta era o já familiar varal de frações. Nesta atividade os alunos se saíram bem, tendo já realizado ela. A principal dificuldade encontrada foi em uma carta que possuía uma dízima periódica, dificuldade a qual foi superada quando os alunos perceberam que o truncamento da dízima não iria impactar gravemente em sua ordenação.

A atividade seguinte foi o jogo dos quatro quatros, organizado pela professora Milena. Neste jogo, novamente os alunos se saíram bem, tendo facilmente encontrado a maioria dos algarismos, tendo dificuldade nos pontos de desafios já previstos: o número sete e dez. A partir desse jogo começou a evidenciar-se, também, o protagonismo de duas integrantes do grupo que, durante as aulas, apresentavam maior facilidade no conteúdo. No entanto, não se tomaram como "centro das atenções", pelo contrário: buscaram ajudar os demais integrantes para que elas também conseguissem participar das atividades propostas.

Dando sequência no roteiro, fomos para a atividade do tangram, onde o propósito era montar quadrados com um número variado de peças do quebra-cabeça. Nesta atividade, no momento de dificuldade previsto (montar utilizando cinco peças) um dos alunos que durante as aulas apresentou maior interesse artístico conseguiu ajudar os outros para finalizar o quebra-cabeça, para que, no final, o grupo conseguisse finalizar todos os níveis propostos.

Em seguida, houve a atividade do *blackjack* de polinômios, onde, para que fosse realizado um número fechado de rodadas, o professor Ruan adentrou à mesa. Nessa atividade, o grupo foi bem, em que, de todas as mãos dadas, pelo menos três dos integrantes venceram o *dealer* (professor Felipe). Durante o jogo, o professor Ruan ajudou os alunos a desenvolverem estratégias, e ensinou o básico de como a contagem de cartas funciona em um jogo de *blackjack*.

A próxima parada do grupo foi na estação das Torres de Hanói. Novamente, já tendo familiaridade com a atividade, o grupo se animou. Houveram comentários antes que a atividade começasse, onde foi questionado se o tempo disponibilizado seria o suficiente: a atividade buscava que resolvesse as Torres de três até seis discos. No entanto, após o início do cronômetro, os alunos se surpreenderam que conseguiam agora resolver com tranquilidade os níveis iniciais. Como era uma torre por integrante, duas das aulas presentes terminaram antes e então passaram a ajudar os demais colegas com suas torres para que, assim, todos finalizaram dentro do limite proposto e a equipe não fosse penalizada nos pontos.

Avançando, as atividades seguintes, o quiz com dardos e medida de peso no Laboratório de Física ocorreram sem grandes momentos de nota. Como foram duas atividades que envolviam bastante computação numérica (uma sendo um quiz de perguntas gerais e a outra, do Laboratório de Física, que envolvia a resolução de sistemas de equações), as duas alunas com maior afinidade tomaram a frente. Nos dardos, depois de algumas rodadas de testes, “pegaram o jeito” de como jogar e conseguimos somar bastante pontos; enquanto no Laboratório de Física, houve uma decepção quando, apenas no final, o grupo perguntou para a professora organizadora da atividade se poderiam utilizar calculadora, a qual respondeu que "sim". No entanto, não dava mais tempo de resolver qualquer sistema adicional.

Finalmente, nos dirigimos para o LEM, o qual foi nossa última parada para a confraternização. Ficou claro que o grupo não foi, de fato, o melhor nas atividades constantes, mas foi um grupo que consistentemente conseguiu solucionar todos os desafios propostos, o que acarretou em sua excelente colocação no final da gincana.

Agora, na estação sete, coordenada pelo Shimmer, a atividade era um paralelo de um de nossos planos antigos, com um varal de frações, ela era composta por grampos, barbante e 13 cartas de frações, com disponibilidade para os alunos poderem usar papel e caneta. O objetivo era ordenar as frações em ordem crescente, com os alunos ganhando um ponto para cada fração que estava "correta", com uma fração "correta" sendo definida como "as cartas imediatamente à esquerda e à direita são, de fato, as cartas imediatamente menor e maior dentre o baralho, respectivamente".

A maioria dos grupos teve facilidade com a atividade, conseguindo terminar com mais de 10 pontos de forma consistente, salvo uma das equipes que apresentou dificuldade com as frações; aparentemente por falta de comunicação dos integrantes, onde cada um buscou fazer separadamente bem como dificuldades com o conteúdo, desconhecendo a ideia que uma fração é uma divisão.

Todavia, todos conseguiram, e os que fizeram com maior facilidade tinham um elemento em comum, eram coesos e parceiros, conseguindo dividir bem os trabalhos entre si. Tal comportamento fortalece nossa convicção na forma metodológica que utilizamos durante todo o percurso do PROMAT: o trabalho em grupo.

Na estação oito, a professora Milena conduziu o jogo dos quatro quatros, que consistia em escrever os números de zero à dez utilizando quatro algarismos "4" e as operações da adição, subtração, multiplicação ou divisão, além de ser imprescindível o uso de parênteses para ordenar as operações para que qualquer pessoa que visse a operação fosse capaz de identificar sua ordem.

Para explicar o jogo, todos os grupos viram uma forma de escrever o número zero: $0 = 4 + 4 - 4 - 4$. A partir do momento que recebiam a instrução, cada integrante do grupo recebia um papel e uma caneta para tentar escrever todos os números.

Notamos que formar o número sete provou-se o mais difícil, no entanto para dar a oportunidade de os alunos pensarem por si mesmos primeiro, a professora Milena esperou até os cinco minutos finais para dar a dica de que era permitido usar dois algarismos quatro para escrever 44 e realizar operações com este número.

Assim como observado na estação 7, os grupos que mais se comunicavam encontravam mais números e eram mais rápidos, pois o pensamento que um aluno começava era completado por outro. Cerca de metade dos alunos tiveram dificuldade para escrever as operações de forma coesa, com o uso correto de parênteses, o que se tornou uma oportunidade de revisão.

Observamos que alguns alunos estavam motivados a encontrar a solução por conta própria, enquanto outros apenas observavam o que os colegas estavam fazendo, demonstrando insegurança e/ou medo de errar. Apesar de não poder ajudar de forma efetiva, por se tratar de uma competição, a estagiária notou que estes alunos precisavam de um incentivo a mais, logo, buscou comentar nas poucas anotações que tinham em seus papéis para que eles sentissem que poderiam chegar em algum lugar. De fato, após alguns comentários de incentivo, a maioria destes alunos que estavam com dificuldade conseguiram (sozinhos ou com a ajuda de algum colega) escrever pelo menos um número.

Depois de todos os grupos passarem por todas as estações, nos reunimos no LEM onde, após uma breve confraternização entre todas as equipes - com direito a cachorro-quente preparado pelos professores coordenadores - verificamos a pontuação e a equipe verde, acompanhada pelo professor Ruan, foi a equipe vencedora.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desses dez encontros, nossa perspectiva como futuros docentes foi modificada para uma com mais nuância. Essa experiência elevou nossos horizontes, e deixou uma marca na forma com qual iremos seguir com nossa carreira. Ela revela-se de extrema importância, como um primeiro contato definitivo com alunos, em uma posição de autoridade, nos dando espaço para experimentar, tentar aplicar todos os métodos que até então aprendemos durante o processo da graduação.

Em um olhar geral, torna-se evidente a quantidade de aprendizados que tivemos, as primeiras aulas deixaram claro a necessidade de organização e comunicação. Mesmo com semanas de preparo para a primeira aula, apenas fizemos o que “achávamos” que seria correto, com pouca comunicação interpessoal entre os docentes sobre “quem faria o que”, ou “ o que fazer”. Para a primeira aula, tivemos sucesso devido à profundidade que conhecíamos o plano, entretanto, essa mesma estratégia falhou para o segundo plano, onde não tínhamos um conhecimento tão profundo do plano, e a aula foi “bagunçada”. Também tivemos que aprender a lidar com a falta de tempo de maneira rápida, pois como todos nós trabalhávamos, poucas vezes pudemos nos reunir presencialmente para planos de aula, aulas ensaiadas; porém nosso sucesso em lidar com isso foi devido à forma com qual cada integrante do grupo trabalhava, e reuníamos as ideias no final, para polir-as em conjunto.

Uma consequência da nossa falta de organização foi a ineficácia de se passar o conteúdo no quadro, ao tentar fazer uma aula tradicional. Enquanto um professor passava o conteúdo no quadro, outro professor explicava o mesmo conteúdo em outra parte do quadro, o que fez com que os próprios professores ficassem confusos sobre o rumo a seguir com a aula, o que deveriam passar no quadro e o que deveriam falar. Inevitavelmente os alunos também tiveram dificuldade de compreender o conteúdo. Além disso, alguns *slides* não foram conferidos com a devida atenção, deixando assim alguns erros de digitação que precisaram ser retificados algumas vezes durante a aula, atrasando o planejamento da aula e talvez confundindo alguns alunos.

Outra aprendizagem que para nós foi significativa foi a forma com qual nossas metodologias nos forçaram a nos preparar-mos de forma mais completa e diversa. Nossa utilização da resolução de problemas, investigação e modelagem matemática fez necessário que a forma com a qual poderíamos explicar fosse diversificada. Como estaríamos lidando com um grupo heterogêneo, e cada discente teria uma forma diferente de se pensar no conteúdo, um olhar mais profundo sobre o conteúdo era necessário.

Notamos que aulas mais interativas, com o uso de algeplan por exemplo, e em ambientes diferenciados, como o laboratório de física, promovem maior engajamento dos alunos para uma aprendizagem mais significativa. A gincana também foi um momento de descontração que permitiu um estudo lúdico por meio da competição.

Em suma, o projeto PROMAT foi extremamente positivo, as experiências e aprendizados que obtivemos não poderiam ser replicadas apenas na posição de discente, necessitando dessa forma de aprendizado mais ativa. Achamos muito valiosa a existência desse projeto no curso de graduação, elevando a formação dos futuros professores de matemática, com as experiências vividas em sala de aula, o olhar de nossos orientadores, e a possibilidade de experienciar a docência em um ambiente seguro, juntamente com colegas com quais somos próximos.